Math. P. 40
57 u

Math. p. 57 u

<36603977370011

<36603977370011

Bayer. Staatsbibliothek

R

Zusammenstellung

einiger

vorzüglich scharfsinniger, schlau erdachter, und subtil durchgeführter

Methoden aus der höhern Analyse.

Nebst einem Anhange

den Geist der Differenzial-, Integral-, Variations-Rechnung

enthaltend.

R

Dem in den höhern Kalkul bereits schon Eingeweiheten gewidmet

vom

Grafen Georg von Buquoy

Doct. d. Phil. und mehr. gel. Ges. Mitgl.

Leipzig,

bei Breitkopf und Härtel

1829.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Die Fähigkeit, a priori Ueberzeugungen zu schöpfen, entspricht blos dem Menschen; ein Klugwerden aus Erfahrung finden wir auch bei Thieren. Da uns nun der Mensch die höchste (uns bekannte) Naturerscheinung ist, so ist uns auch das eigentliche Menschenkriterion, die apriorische Denkfähigkeit, die höchste (uns bekannte) Naturthätigkeit. An dieser giebt es nun wieder Grade des Ranges, zu deren Bestimmung es keinen sicherern Maaßstab giebt, als jenen der Evidenz. Dem zufolge muß rein mathematisches Denken, das allein auf absolute Evidenz führt, uns als die höchste (uns bekannte) Naturthätigkeit gelten.

Das außermathematische Denken führt so wenig auf Evidenz, daß ich mich öffentlich dazu antrage, von jeder außermathematisch apriorischen Behauptung, die mir zur Beurtheilung geliefert wird, evident darzuthun, daß jene Behauptung nicht nothwendig wahr seyn müsse. Wem stehen überdieß so untrügliche Prüfungsmittel auf Wahrheit — zu Gebote, wie dem Geometer hinsichtlich seiner Formel? Wie so mancher mit Bombast verkündete und in den Schulen nachgebetete Satz aus der Philosophie, Moral, Politik, der sogenannten Naturrechtslehre u. s. w. möchte vielleicht als leeres Wortspiel erscheinen, gäbe es ein Mittel, solche Sätze so strengen, ich möchte mit dem Chemiker sagen, Reagenzien zu unterwerfen, als dieß hinsichtlich der mathematischen Formel möglich wird? Oben hingeworfenes, etwa Manchem kühn scheinendes, Vielleicht — würde zu einer nur mit Stumpfheit und Ignoranz vereinbarlichen Frechheit, wenn

es z. B. da angewandt werden wollte, wo Neuton aus aprioriſch konſtruirten Formeln daſſelbe ausſpricht als die Keppleriſchen Geſetze ausſagen.

Da das Schickſal den Mathematiker allein — nur ihn — dazu verurtheilt hat, daß an jedem ſeiner Denkreſultate allemal der Charakter abſoluter Wahrheit oder jener des Abſurdums entdeckt werden kann, — wohlverſtanden: entdeckt; da hier kein Wortſpiel, kein Gefühlanſprechen, kein Verführen durch ſchöne Form, u. ſ. w., aus der Noth helfen kann; da hier ſtatt echter Waare nicht etwa blos ſchön apretirte zu Markte gebracht werden darf; u. ſ. w.; ſo ſah ſich, ſeit dem graueſten Alterthume bis auf uns, Keiner durch den harten unerbittlichen Drang der Nothwendigkeit ſo gezwungen, mit Scharfſinn, Subtilität, Fineſſe, Schlauheit, Liſt u. ſ. w., in die Tiefen des Denkens einzudringen, wie der Geometer.

So intereſſant es nun dem in Schlacht und Lager ergrauten denkenden Krieger ſeyn müßte, eine hiſtoriſch geordnete, kurz klar und geiſtreich ſkizzirte, Darſtellung der vorzüglichſten, etwa ſeit dem macedon'ſchen Phalanx, angewandten Schlauheiten und Fineſſen in der Kriegskunſt, vor ſich zu haben; eben ſo willkommen müßte es dem, mit den Schwierigkeiten, aber auch mit dem Alles überwiegenden Lohne des Kalkuls vertrauten, Geometer ſeyn, eine Zuſammenſtellung der, etwa ſeit Archimedes, in der Mathematik angewandten intereſſanteſten Expediants zu beſitzen, mittelſt deren der widerſpänſtigen Wiſſenſchaft ſo manche Antwort auf die an ſie geſtellte Frage abgedrungen ward.

Solch ein, hier nur als Ideal angegebenes, Werk zu liefern, iſt hier keineswegs meine Abſicht, ſondern als bloße Beiträge zu ſolch einem Werke möge dieſe Schrift genommen werden.

Wenn keine Vorliebe, für die neueſten Methoden in der höhern Analyſis, mich dahin verleiten konnte, die ältern Methoden außer Acht zu laſſen, ſo möchte ich hierinfalls um ſo mehr gerechtfertigt erſcheinen, bei aller Hochachtung für die Geometer der neueſten Zeit, wenn ich mich hier ganz freimüthig folgendermaßen äußere:

Die mathematische Methode der Neuern hat sich, zum Nachtheile ehemaliger Präcision und Klarheit, zu ausschließend dem analytischen Formelnkonstruiren hingegeben, und zu sehr die geometrische Konstruktion vernachlässigt. Es hat sich solchergestalt, durch die Geschmeidigkeit und regsame Mobilität der Formel, wo, man möchte sagen, der Rechner, vom Sirenengesange des Symboles hingerissen, über der Extase die ruhige Besinnung aufgab, in das mathematische Treiben der neuern Zeit, zumalen in Frankreich als der Hauptarena mathematischer Genialität, eine Art metaphysisch-poetischen, mit hoher Subtilität gepaarten Machtspruchorgans eingeschlichen, das zwar außerordentlich brillant und elegant, das entzückend, überraschend, und die Einbildungskraft im höchsten Grade ansprechend ist, woran aber der ruhige kalte Denker ungern jene Klarheit und Präzision vermißt, die von Archimedes, Pythagoras, Euklid, Neuton, Euler u. s. w. her, auf uns hin, sich verpflanzen sollten, und die so wonniglich uns ansprechen.

Ob ich in diesen Blättern gleich nur die höhere Analysis zum Gegenstande meiner Betrachtungen gewählt habe, so will ich hier dennoch, zur Ergänzung des historischen Ueberblickes, Einiges über die, seit Neuton statt gefundene, allmälige Entwicklung der Methode in der (mit der höhern Analysis so nahe verwandten) analytischen Dynamik erwähnen.

Die analytische Dynamik, will man doch ja hierunter eine eigentliche Wissenschaft verstehen, ist durch und durch als eine Schöpfung Neutons zu erklären, und zwar als ein mit solcher Meisterhand, seiner Grundorganisation nach, hingestelltes Werk, daß das gesammte, seit Neuton auf jene Wissenschaft bezogene Treiben, weiter nichts war, als ein Fortschreiten in der uns von Neutons allmächtigem Genie vorgezeichneten Bahn.

Seit jenem Gründer blieb die analytische Dynamik (die Hydrodynamik hier in jener nicht mit einbegriffen) in Statik und Mechanik stets getrennt; d. h. es konnten Statik und Mechanik, obwohl erstere blos ein speziell Angeschautes an letzterer ist, nicht als ein Ganzes aus einem Gusse konstruirt, nicht aus einem einzigen Fundamentalprinzipe entwickelt, werden; sondern es ging alle Statik von

irgend einem statischen und alle Mechanik von irgend einem dynamischen oder phoronomischen Prinzipe aus.

Bis auf Delagrange gaben für die Statik der Hebel, die schiefe Fläche, das Kräfteparallelogram wesentlich die Basis ab, seit Delagrange aber häufig das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten *), zumalen in Frankreich und mitunter in Deutschland; in England hielt man sich fortan noch an Neutons und Eulers Methode.

Hinsichtlich der Mechanik, der eigentlichen Bewegungslehre, gaben den ersten Auslaufpunkt aller Entwicklungen ab, seit Neuton, die Fundamentalgleichungen zwischen Zeit, Raum, Endesgeschwindigkeit, bewegender Kraft, beschleunigender Kraft, Masse, Beschleunigung der Schwere, allgemeiner Beschleunigung ($t, s, v, P, \frac{P}{Q}, Q, g, G = g\frac{P}{Q}$), nämlich $dv = 2\,G\,dt$, dann $ds = v\,dt$, u. s. w. Delagrange, die meisten französischen Geometer, und mehrere der deutschen, wichen von jener Methode ab, und entwickelten, mitunter eine staunenswerthe Gewandtheit im Kalkul beurkundend, die Mechanik aus dem sogenannten Principe général (welches zu viel sagt) de dynamique attribué à d'Alembert, welches kurz so lautet: es bestehe ein System von Massen m, m', m'', ... (deren jede als ein physischer Punkt gedacht wird); die unmittelbar in m angebrachte Kraft habe jene Richtung und Größe, daß sie der Masse m binnen dt, nach jener Richtung, wornach sich m im Systeme wirklich bewegt, das Geschwindigkeitsinkrement dV ertheilen würde, wenn m binnen dt vom Systeme getrennt, ganz frei wäre; es erlange aber m binnen dt nach erwähnter Richtung wirklich das Geschwindigkeitsinkrement dv (weil m nicht frei, sondern am Systeme gebunden ist); es haben ferner dV', dv' in Bezug auf m', dann dV'', dv'' in Bezug auf m'', dann ..... ähnliche Bedeutungen, so ist Folgendes richtig: es besteht zwischen den Verlusten $m(dV - dv), m'(dv' - dV'), m''(dv'' - dV'')$,

*) Anmerk. Dieß Prinzip konnte jedoch nicht aus sich selbst erwiesen werden; hierüber ein Mehreres weiter unten.

......, der einzelnen Inkremente an Bewegungsquantitäten eben so ein statisches Gleichgewicht, als ob die Ausdrücke m (dV — dv) ...... relative Quantitäten von Drucken wären, welche Drucke in m, m′, m″, ... angebracht, nach jenen Richtungen wirken möchten, wornach V, v, dann V′, v′, dann .... bezogen wurden. So ging denn die Statik vom principe des vitesses virtuelles aus, und die Mechanik, vom principe géneral attribué à d'Alembert allemal in Kombination mit dem principe des vitesses virtuelles, wie dieß z. B. in der klassischen mécanique analytique des Delagrange ersehen werden kann. Noch verdient hier angemerkt zu werden das principe de la conservation des forces vives, und jenes de la moindre action (u. a. in Poisson traité de mécanique, in Prony mécanique philosophique).

Ich war so glücklich, durch angestrengtes und lange fortgesetztes Denken, ein Fundamentalprinzip aller Mechanik und Statik, welche beide mir eine einzige Wissenschaft sind, zu finden, aus welchem einzigen Fundamentalprinzipe alle Sätze der Mechanik und (deren speziellen Falles) der Statik sich ergeben, und zwar unmittelbar durch bloße Substitution in die, jenem Fundamentalprinzipe entsprechende, Gleichung von der Form:

$$\pi ds + \pi' ds' + \pi'' ds'' + \ldots. = \frac{1}{2gdt}(\delta q . ds + \delta q' . ds' + \ldots.).$$

Zugleich gewährt mir obiges Fundamentalprinzip den Vortheil, aus jenem Prinzipe das principe des vitesses virtuelles, für statische Fälle so lautend: $\pi ds + \pi' ds' + \pi'' ds'' + \ldots. = 0$, aufs Strengste erwiesen zu haben, ein Resultat, das sich mir nur nebenher, ganz ungesucht, als Corollarium ergab.

Jenes von mir erfundene Prinzip, wornach ich bereits schon Vieles aus der Statik und Mechanik entwickelte *) lautet so:

Bestehe irgend ein System von materiellen Punkten, welche unter einander

*) Anmerk. Siehe Buquoy analyt. Bestimmung u. s. w.; Buquoy weitere Entwicklung u. s. w.; Buquoy Exposition .... lu à l'institut u. s. w.; Buquoy Prodromus.... analyt. Dynamik u. s. w.

in irgend einer bestimmten Bewegungsrelation stehen, d. h. wobei die durch Raum und Richtung gegebene Bewegung irgend eines jener Punkte, für jeden der übrigen aus jenen Punkten, zu gleicher Zeit eine durch Raum und Richtung bestimmte Bewegung postulirt. Seyen ferner jene Punkte in ihrer Wechselbeziehung zwar angemessenen, übrigens jedoch beliebigen, Bewegungen oder auch in Ruhe (die Ruhe ist blos ein einzelner, der Geschwindigkeit Null entsprechender, Fall der Bewegung) begriffen, und seyen beliebig aus jenen Punkten diese oder jene (beliebig einer oder beliebig einige oder alle) zu gleicher Zeit, von, der Größe (durch Druck gemessen) und Richtung nach beliebigen Kräften sollizitirt; so ist am Ende irgend einer Zeit t, binnen einerlei Zeitdifferenzial dt, allemal Folgendes richtig: die Summe der Produkte aus den, binnen dt, jene Punkte sollizitirenden Kräften (als Druckgrößen ausgedrückt) in die von denselben Punkten binnen dt, nach den Richtungen jener Kräfte, durchlaufenen Räume (diese Räume sind Katheten der die unmittelbaren Durchlaufensräume darstellenden Hypothenusen) ist gleich der, durch die doppelte Beschleunigung der Schwere und durch das Zeitdifferenzial getheilten, Summe der Produkte aus den, binnen dt, in allen materiellen Punkten des Systems, blos durch binnen dt bestehendes Einwirken obenerwähnter Kräfte, hervorgebrachten Inkrementen an Bewegungsquantitäten (als Produkte aus Massen in Geschwindigkeitsinkremente und aus Geschwindigkeiten in Masseninkremente ausgedrückt) in die von den letzterwähnten Punkten, binnen dt, nach den jenen Bewegungsquantitäts-Inkrementen entsprechenden Richtungen, d. h. nach den jenen Punkten binnen dt entsprechenden unmittelbaren Richtungen wirklich vollzogener Bewegungen, durchlaufenen Räume.

Hiermit ist die analytische Dynamik (wovon die Statik nur einen Theil ausmacht) von nun an erst als ein in sich geschlossenes System zu betrachten.

Zusammenstellung der Methoden.

A

Zusammenstellung der Methoden.

Ableitung der rekurrirenden Form aus der independenten, hinsichtlich des allgemeinen Gliedes.

$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_n, u_{n+1}, \ldots\ldots$ drücke z. B. eine geometrische Reihe aus, deren Exponent $= q$ ist, so ist $u_n = a . q^{n-1}$, hierin n durch $n - 1$ substituirt giebt $u_{n-1} = a . q^{n-2}$, woraus folgt $\frac{u_n}{u_{n-1}} = q$ oder $u_n = u_{n-1} q$.

Nummerische höhere Gleichung.

Substitutionsmethode. Werthe der Unbekannten zwischen jenen liegend, durch deren Substitution die Zeichen (+—) der gleich Null werden sollenden Funktion ändern u. s. w., wo dann die Differenzialrechnung noch die fernere Annäherung bestimmt, u. s. w.

Unbestimmte höhere Gleichung.

Aus $f(x, y) = o$, wird y durch x dadurch ausgedrückt, daß $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots = \varphi(x)$ gesetzt, hiernach $y^2, y^3, \ldots\ldots$ ausgedrückt, in die erste Gleichung substituirt, und sonach $f c x, \varphi(x) = o$ geordnet und als identische Gleichung betrachtet wird, da $f(x, y)$ für jegliche zusammengehörige Werthe von x und y, da folglich $f(x,) \varphi(x))$ für jeden Werth von x, verschwinden muß, wornach jeder der Koeffizienten von $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots\ldots$ an und für sich gleich Null zu setzen kömmt, aus welchen Gleichungen die Koeffizienten $A, B, C, \ldots\ldots$ gefunden werden, indem die in $f(x, \varphi(x)) = F(x)$ enthaltenen Koeffizienten von $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots\ldots$, als durch $A, B, C, \ldots\ldots$ ausgedrückt erscheinen.

Rationale Funktion in Faktoren zerlegen.

Die Funktion von x mit dem Koeffizienten a der höchsten Potenz von x multipliciren und dividiren, wodurch jene Potenz blos mit dem Koeffizienten $= 1$ erscheint. Die sonach

veränderte Funktion gleich Null setzen, und die Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \dots\dots$ von x bestimmen. Dann ist der gesuchte Ausdruck $= a\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots\dots$

Beliebiges Glied tilgen.

In auf Null reduzirter geordneter höherer Gleichung $x^n + b x^{n-1} + \dots\dots + h = o$, wird beliebig ein Glied getilgt, wenn man $x = y + k$ durchaus substituirt, Alles nach Potenzen von y ordnet, den betreffenden Koeffizienten von y^l gleich Null setzt, und aus solcher Gleichung den Werth für k sucht; u. s. w.

Reiheausdruck von a^x.

Ist a größer als 1 und u ganze Zahl, so ist $a^u = 1 + f(u) = 1 + ku + lu^2 + \dots\dots$ worin blos ganze Zahlen als Exponenten vorkommen können. $a^u - 1 = ku + lu^2 + \dots\dots$ bleibt auch wahr für $u = n - n = n.1 - n.1 = n(1-1) = n.o$, dann ist $a^{n.o} - 1 = k.n.o$, oder $a^{n.o} = 1 + k.n.o$, also auch $a^{\frac{n.o}{m}} = (1 + k.n.o)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m} k.n.o, + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{2} k^2.n^2.o^2 + \dots.$, welches auch wahr bleibt für $m = i - i = i.1 - i.1 = i(1-1) = i.o$; also ist $a^{\frac{m}{i}} = a^x = 1 + \frac{1}{m} k.mx + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{2} k^2.m^2x^2 + \dots\dots\dots = 1 + kx + \left(\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right) k^2.m^2x^2}{2m^2}\right) m^2 + \dots\dots = 1 + kx + \left(\frac{1-m}{2}\right) k^2x^2 + \dots\dots = 1 + kx + (1 - i.o)\frac{k^2x^2}{2} + \dots\dots = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \dots\dots$, u. s. w.

Reiheausdruck von Cos z.

Die Entwicklung des Produkts aus beliebig vielen Faktoren, sämmtlich von der Form $\text{Cos}\,x \pm \text{Sin}\,x\sqrt{-1}$, führt auf die Gleichung $(\text{Cos}\,x \pm \text{Sin}\,x\sqrt{-1})^m = \text{Cos}\,mx \pm \text{Sin}\,mx\sqrt{-1}$; hieraus Cos mx auf doppelte Weise ausgedrückt, führt die Addition auf die Gleichung $2\,\text{Cos}\,mx = \dots\dots$, u. s. w.; $x = \frac{z}{\infty}$ substituirt, giebt

$$\text{Cos}\,z = \frac{\left(1 + \frac{z}{\infty}\sqrt{-1}\right)^m}{2} + \frac{\left(1 - \frac{z}{\infty}\sqrt{-1}\right)^m}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4.} - \dots\dots$$

Faktorenzerlegung an $x^m + a^m$.

Wird in den Ausdruck $x^2 - 2ax\,Cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{m}\right) + a^2$, statt n der Werth $= 0$ gesetzt, und dann der Ausdruck in seine Faktoren zerlegt, so sind die so erhaltenen zwei Faktoren zugleich auch Faktoren von $x^m + a^m$. Dasselbe tritt dann ein, wenn $n = 1$, dasselbe wenn $n = 2$, dasselbe wenn $n = 3$, u. s. w. substituirt wird. Wornach man successive zwei dann wieder zwei u. s. w., Faktoren von $x^m + a^m$ erhält. Zur Ueberzeugung von der Wahrheit jener Behauptung gelangt man so: sind f und φ gerade solche Zahlen, daß jeder der beiden Werthe für x auf $\lambda(x) = x^2 - 2f.Cos\varphi.x + f^2 = 0$, wenn der eine α oder der andere β statt x in den Ausdruck $x^m + a^m$ substituirt wird, denselben zu Null macht, so sind die (allemal auffindbaren) zwei Faktoren von $\lambda(x)$ zugleich zwei der Faktoren von $x^m + a^m$. Welche Zahlen müssen nun aber f und φ seyn, damit Besagtes eben statt finde? f und φ müssen solche Zahlen seyn, daß hiedurch folgende zwei Gleichungen entstehen:

$f^m(Cos\varphi + Sin\varphi\sqrt{-1})^m + a^m = 0$ und

$f^m(Cos\varphi - Sin\varphi\sqrt{-1})^m + a^m = 0$, als Aequivalent der Gleichungen $\alpha^m + a^m = 0$ und $\beta^m + a^m = 0$. Noch kömmt zu bedenken, daß $(Cos\varphi \pm Sin\varphi\sqrt{-1})^m = Cos\,m\varphi \pm Sin\,m\varphi\sqrt{-1}$, daß aus $Sin\,m\varphi = 0$ folgt $m\varphi = 2n\pi$ oder $(2n+1)\pi$, u. s. w.

Partialbrüche.

$$\frac{a+bx+cx^2}{(g+dx)(m+nx)(h+kx)} = \frac{A}{g+dx} + \frac{B}{m+nx} + \frac{C}{h+kx} = \frac{A}{g+dx} + \frac{P}{(m+nx)(h+kx)}$$

$= \frac{A}{g+dx} + \frac{P}{N}$, oder $\frac{M}{(g+dx)N} = \frac{A}{g+dx} + \frac{P}{N}$, also $P = \frac{M - A.N}{g+dx}$; identische Gleichung, und P ganze Funktion, also $g+dx$ Faktor von $M - AN$, letzteres wird also Null für $x = -\frac{g}{d}$, welches wir so ausdrücken: $M' - A.N' = 0$, woraus $A = \frac{M'}{N'}$; u. s. w.

Reihensummirung.

Summiren der Reihen $1 - 1 + 1$ u. s. w., $1 - 3 + 5$ u. s. w. $1 - 16 + 81$ u. s. w., und mehrerer anderer, nach der Formel $a\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta a\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 a\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \ldots\ldots = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \ldots\ldots$, mit Substitution von $x = 1$, und entsprechender Werthannahme für die Koeffizienten a, b, c, d, ...

Kleinster Werth aus $1 - \alpha z -$ u. s. w. $= 0$.

Z. B. aus $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 = 0$ zu suchen.

Sey $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 = (1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$, so hat z die Werthe: $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$; ist ferner $p > q$ und $q > r$, so ist $\frac{1}{p}$ der kleinste Werth von z. Um also den kleinsten Werth von z zu finden, suche die Zahl, welche approximativ $= p$ ist, und theile 1 durch selbe. Um aber approximativ p zu finden, raisonnire so: bei irgend einer Konstante $= a$, ist (Partialbrüche) $\frac{a}{(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)} = \frac{A}{1 - pz} + \frac{B}{1 - qz} + \frac{C}{1 - rz}$, also $\frac{a}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} = \frac{A}{1 - pz} + \frac{B}{1 - qz} + \frac{C}{1 - rz}$. Wird links und rechts die Division vollzogen, so entstehen zwei nach steigenden Potenzen von z laufende Reihen, die eine unter einander identische Gleichung bilden. Rechts, also auch links, sind, wenn n gehörig groß angenommen, approximativ: Koeffizienten von n^{tem} und $(n+1)^{tem}$ Gliede $= Ap^{n-1}$ und $= Ap^n$, *) also ist letzterer getheilt durch erstern $= p$, approximativ. Um also p approximativ zu finden, verrichte die durch $\frac{a}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3}$ angezeigte Division, und theile, an der erhaltenen Reihe, den Koeffizienten des $(n+1)^{ten}$ Gliedes durch den Koeffizienten des n^{ten} Gliedes.

Allgemeinste Kegelschnittgleichung.

Eulers bekannte Gleichung $z = \pm \sqrt{fu^2 + gu + h}$ giebt, auf eine höchst scharfsinnige Weise, den Lauf sowohl der Hyperbel als der Ellipse, als der Parabel, daher jeder Art der Kegelschnitte, durch einen einzigen Ausdruck **). Es entspricht nämlich obige Gleichung der Hyperbel oder Ellipse oder Parabel, je nachdem der als konstant angenommene Koeffizient $f = +$ oder $= -$ oder $= 0$ gesetzt wird; denn im ersten Falle hat für $u = +\infty$ und $u = -\infty$ das z immer noch einen reellen Werth; im zweiten Falle hat für sowohl $u = +\infty$ als $u = -\infty$ das z einen imaginären Werth; im dritten Falle hat für $u = +\infty$ das z einen reellen, hingegen für $u = -\infty$ das z einen imaginären Werth; d. h. die Kurve erstreckt sich im ersten, zweiten und dritten Falle nach beiden, nach keiner und blos nach einer der entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche.

*) Anmerk. Approximativ $Ap^n = Ap^n + Bq^n + Cr^n$; eben so u. s. w.

**) Anmerk. Der Kreis ist ein specieller Fall der Ellipse überhaupt.

Funktion.

Nur die tiefste abstrakteste und subtilste mathematische Anschauung, im eigentlichen Sinne höherer Analysis, konnte auf den Begriff der Funktion, und auf die in neuerer Zeit so staunenswerth entwickelte Funktionsrechnung führen, die sich vorzüglich in Frankreich ausbildete, und ihren Hauptimpuls durch Delagrange's unsterbliches Werk Théorie des fonctions analytiques erhielt, als womit ein ganz neuer Kalkul, nämlich der Derivationskalkul, der Welt gegeben war, woraus der eigentliche Sinn, die höhere Bedeutung, von Taylor's schon lange bewunderter Formel, erst klar und lebendig hervorging, welches in der Folge Soldner noch viel weiter ausdehnte, indem nach dessen ganz und gar allgemeiner Formel *)

$$F(x+\Delta x)=F(x)+\Delta f(x)\frac{dF(x)}{df(x)}+(\Delta f(x))^2\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{2\,df(x)}+(\Delta f(x))^3\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{2\,df(x)}\right)}{2.3.\,df(x)}$$

u. s. w. die Taylor'sche blos als deren einzelner Fall, nämlich für $\Delta f x = x$, hervorging, indem Taylor's Formel so lautet:

$$F(x+\Delta x)=F(x)+\Delta x.\frac{dF(x)}{dx}+\frac{\Delta x^2}{2}.\frac{d^2F(x)}{dx^2}+\ldots\ldots,$$

welches Delagrange folgendermaßen ausdrückt:

$$F(x+\Delta x)=F(x)+\Delta x.F(x')+\frac{\Delta x^2}{2}.F(x'')+\frac{\Delta x^3}{2.3}F(x''')+\ldots\ldots,$$

als woraus dann unter den Neuern die höchst allgemeine und äußerst elegante Methode der Reihenentwicklung sich ergab, indem die Formel besteht:

$$F(x)=\overset{x=0}{\overbrace{F(x)}}+x.\overset{x=0}{\overbrace{F(x')}}+\frac{x^2}{2}.\overset{x=0}{\overbrace{F(x'')}}+\frac{x^3}{2.3}.\overset{x=0}{\overbrace{F(x''')}}+\ldots\ldots$$

Die richtige Auffassung des Sinnes vom Wesen der Funktion, so wie des Rapportes zwischen der jedesmaligen Funktion und deren Wurzeln oder Argumenten, sey es analytisch ausgedrückt, oder durch geometrische Construktion dargestellt, ist die Basis aller mathematischen Arbeiten seit Newton, und liefert zugleich die eigentliche Bedeutung des Differenzial- und Variations-Kalkuls, da ersterer sich auf Variabilität der Werthe der Wurzeln, hingegen letzterer auf Variabilität der unter den Wurzeln angenommenen Gleichungen bezieht, wie ich dieß weiterhin deutlicher entwickle.

Die Funktionsrechnung, welche die neuesten Geometer zu einer staunenswerthen Höhe,

*) Anmerk. Siehe ein Mehreres hierüber in der Schrift: Buquoy neue Blicke in die Fundgruben der mathematischen Analysis u. s. w.

Anwendbarkeit, Geschmeidigkeit und Eleganz gebracht haben, soll in der zweiten Abtheilung dieser Schrift weiter entwickelt werden. Sie ist dem schnellen und überraschenden Auflösen der allerschwierigsten Aufgaben ganz vorzüglich günstig, artet aber leicht in Formelnschmiederei aus, und gewährt weder die Klarheit noch den Charakter ruhiger Besonnenheit der Ueberzeugung der ältern Methoden, welche sicherlich der formalen Bildung günstiger sind, als die neue analytische Methode, die nur allzuleicht in mechanischen, gedankenlosen Rechnungsschlendrian ausartet.

Sehr scharfsinnig sind selbst die bloßen Bezeichnungen im Funktionskalkul, z. B. $F(x, y, z)$, oder $F\left(\frac{x}{u}, y, z, v\right)$, oder $F(x, \varphi(y), \psi(z))$, u. s. w.

Interpoliren durch endliche Differenzen.

Sey $y = F(x)$, so daß $\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$, u. s. w.; so ist das dem x dem $x + \Delta x$ dem $x + 2\Delta x$ dem $x + 3\Delta x$ dem $x + 4\Delta x$ dem u. s. w. entsprechenden y in seinen successiven Werthen so anzusetzen: y dann $y + \Delta y$ dann $y + \Delta y + \Delta(y + \Delta y) = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$ dann $y + 2\Delta y + \Delta^2 y + \Delta(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$ dann u. s. w.; überhaupt ist, in der Reihe: $y, y', y'', y''', y'''', \ldots\ldots$, äquivalent mit jener $F(x), F(x + \Delta x), F(x + 2\Delta x), + F(x + 3\Delta x), \ldots\ldots$, das n^{te} Glied $= y + (n-1)\Delta y + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\Delta^2 y + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}\Delta^3 y + \ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-(n-1))}{2.3.\ldots\ldots(n-1)}\Delta^{n-1} y$. Aus dem Sinne der Differenzrechnung heißt eigentlich:

Δy so viel wie erstes Glied in der Reihe der ersten Differenzen;
$\Delta^2 y$ so viel wie erstes Glied in der Reihe der zweiten Differenzen;
$\Delta^3 y$ . . . . dritten . . . .; u. s. w.; hier Alles auf die ursprüngliche Reihe: $y, y', y'', y''', y'''', \ldots\ldots$ bezogen.

Anmerk. Ich will hier gelegenheitlich eine von mir erfundene Interpolirensmethode anführen (siehe Buquoy neue Blicke in die Fundgruben der math. Analys. . . . .).

Es ergebe sich aus Versuchen: für $x = a$ das $y = A$, für $x = a + \omega$ das $y = A'$, für $x = a + 2\omega$ das $y = A''$, für $x = a + 3\omega$ das $y = A'''$, für $x = a + 4\omega$ das $y = A''''$, u. s. w.; so ist in der Reihe

$A A' A'' A''' A''''$ u. s. w. das n^{te} Glied $= A + (n-1)\Delta A + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\Delta^2 A + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}.\Delta^3 A + \ldots$; nun ist aber das n^{te} Glied der Reihe $\underbrace{A A' A'' A''' A'''' \ldots}_{x = a + (n-1)\omega}$ eben so viel als das dem $x = a + (n-1)\omega$ entsprechende $F(x)$ oder als $F(x)$.

Setzen wir daher

$$x = a + (n-1)\omega, \text{ oder } n = \frac{x-a+\omega}{\omega}, \text{ so ist: } F(x) = A + \frac{(x-a)}{\omega}.\Delta A + \frac{(x-a)}{\omega}\left(\frac{\frac{x-a-\omega}{\omega}}{2}\right).$$

$$\Delta^2 A + \frac{(x-a)}{\omega}\left(\frac{\frac{x-a-\omega}{\omega}}{2}\right)\left(\frac{\frac{x-a-2\omega}{\omega}}{3}\right).\Delta^3 A + \frac{(x-a)}{\omega}\left(\frac{\frac{x-a-\omega}{\omega}}{2}\right)\left(\frac{\frac{x-a-2\omega}{\omega}}{3}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{x-a-3\omega}{\omega}}{4}\right).\Delta^4 A + \ldots\ldots$$

Differenzialkalkul.

Der Differenzialkalkul ist sicherlich das scharfsinnigste, das subtilest und schlauest ersonnene, und zugleich das durchgreifendste so wie fruchtbarste, Expediant zu Lösung der schwierigsten mathematischen Aufgaben. Auch zeigt die Praxis im rein mathematischen sowohl als angewandt mathematischen Operiren, und ein historisch reasumirender Ueberblick am savoir faire des abstraktern Kalkuls, daß aus der gesammten Succession der seit der Kindheit des Forschens bis auf Laplace und Gauß hin erdachten Förderungsmittel für möglicherweise zu liefernde Rechnungsresultate, nie ein Mittel ersonnen ward, das, hinsichtlich einer bewirkten über allen Ausdruck günstigen totalen Umwandlung der gesammten mathematischen Methode, sowie bezüglich der Fülle gelieferter staunenswerther Resultate, mit dem Differenzialkalkul auch nur entfernt her verglichen werden könnte. Es ist unmöglich, bei inniger Erwägung des Wesens am Differenzialkalkul, nicht zu der tiefsten Meditation hingezogen und zugleich in lyrische Extase emporgeschwungen zu werden.

Der Pythagoräische Lehrsatz vom Quadrate der Hypothenuse, gab zwar der Geometrie einen mächtigen Vorschub; vermochte aber nicht, dieselbe von der Fessel des Gradlinigten zu befreien, obgleich jener Lehrsatz, nach Erfindung der Differenzial- und Integral-Rechnung, zur Rektifikation der Kurven, nach der Gleichung $s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, immer noch unentbehrlich blieb.

Die Auffindung des approximativen Ausdrucks für Kreisperipherie und Kreisfläche liefert zwar eine wichtige Epoche in der Geschichte der Mathematik; aber immer noch ist hiemit kein Blick in die unübersehbare Welt der Kurven, und des, irgend einem Gesetze unterworfenen, Ungleichförmigen in der Bewegung, gestattet, als die Gebiete nämlich, innerhalb welcher die mathematischen Wissenschaften erst anfangen, eines höhern Schwunges theilhaftig zu werden, sich frei und zwanglos zu bewegen.

Die Feststellung der allgemeinen Gravitation, gab freilich der physischen Astronomie, der Mechanik des Himmels, ihre wissenschaftliche Haltung, übte aber auf die gesammten mathematischen Wissenschaften keinen allgemein durchgreifenden regenerirenden Einfluß aus.

Ueberdieß hätte weder das Daseyn noch das Gesetz einer das Weltall beherrschenden Gravitation je erwiesen werden können, wäre es nicht möglich gewesen, das Gesetz der Bewegung eines um einen wie irgend anziehenden Centralpunkt bewegten Punktes mit den Kepplerischen Gesetzen zu vergleichen; wobei jedoch zu bemerken kömmt, daß jenes zuerst benannte Gesetz ohne den Differenzialkalkul gar nicht hätte bestimmt werden können.

U. s. w.

Aber nicht blos hat sich der Differenzialkalkul, unter allen ersonnenen Mitteln für Lösung schwieriger Aufgaben, als das fruchtbarste, förderndste, alldurchgreifendste u. s. w. bewährt; sondern er beruht, insoferne die Individualität des Entdeckens hier berücksichtigt wird, bei weitem auf dem, vergleichungsweise zu andern Entdeckern, höchsten Scharfsinne, so wie der subtilsten und vollendetsten Anschauung des abstraktern Theiles der Mathematik.

Bei Auffindung des Pythagoräischen Satzes, war es leicht, auf den Einfall zu gerathen, daß zwischen den 3 Seiten des Rektangels irgend ein konstantes Verhältniß bestehen müsse, und es kam blos darauf an, jenes Verhältniß zu finden.

Aehnliche Bemerkungen finden statt, hinsichtlich des Ausdrucks für Peripherie und Fläche am Kreise, so wie hinsichtlich des Bestehens und des Gesetzes der Gravitation am Weltall, so wie hinsichtlich aller außer dem Differenzialkalkul im Gebiete der Mathematik gemachten Entdeckungen, insoferne sie nicht bloße Corollarien aus jenem erhabenen Kalkul sind, wie z. B. die Funktionsrechnung der neuesten Geometer, die wesentlich auf Delagrange's Derivationskalkul beruht, welcher sein Entstehen einer tiefern Ergründung des Taylor'schen Theorems dankt, welches letztere unmittelbar aus der Differenzialrechnung hervorging.

Ganz anders verhielt es sich hinsichtlich der Entdeckung des Differenzialkalkuls. Hier kam es nicht blos darauf an, die Art eines Rapportes auszumitteln, dessen Daseyn, auch schon vor jener Ausmittlung, Jedermann klar einleuchten mußte; sondern es handelte sich hier um etwas, wozu weit mehr Scharfsinn und Erfindensgenialität erforderlich waren, wobei überdieß ein durch angestrengte Studien erlangter tiefer Blick in die verborgensten Geheimnisse des Kalkuls schon da seyn mußte; es kam nämlich hier darauf an, auf den ungemein genialen Einfall — zu gerathen, — daß es Größen gebe, welche bei der wie irgend angenommenen Variabilität anderer Größen, wobei die Benennungen Funktion und Wurzel oder Argument festgesetzt wurden, nach einem Gesetze der Continuität — sich veränderten; daß es ferner bestimmte Verhältnisse geben müsse, nicht blos zwischen der Funktion und ihren jedesmaligen Wurzeln, sondern auch zwischen den zusammengehörigen Inkrementen der zusammengehörigen Werthe der Wurzeln einerseits und dem entsprechenden Inkrementum des entsprechenden Werthes der entsprechenden Funktion andrerseits.

Auf geniale Einfälle dieser Art konnte nur derjenige gerathen, der, nebst dem von der Natur erhaltenen höchsten Grade des Scharfsinnes und der Fähigkeit abstrakten Denkens und

Erfindens in der Sphäre der erhabensten und subtilsten Combinationen, auch noch einen blos durch langjährige unverwandt und tief verfolgte mathematische Studien zu erlangenden Takt besaß, so zu sagen eine gewisse mathematische Schlauheit und Finesse, ein eigenthümliches geschäftsmäßig erlangtes savoir faire im mathematischen Erfinden und Weiterentwickeln des Erfundenen; es konnte auf geniale Einfälle erwähnter Art schlechterdings nur derjenige gerathen, der, durch die entzückende Harmonie an einem bereits sich angeeigneten ungeheuern Gebiete mathematischen Wissens, in lyrisch-meditative Ertase versetzt, die nur den Eingeweiheten verständlichen Accente des in höhern Regionen als im eigenen Elemente Schwebenden auszusprechen vermochte.

Alles so eben Gesagte erhält aber eine noch weit gesteigertere Bedeutung, wenn jene merkwürdige Epoche erwogen wird, wo es sich darum handelte, auf den das Superlativ der Genialität erreichenden Einfall zu gelangen, daß unter den auf den Nullwerth — reduzirten Inkrementen oben erwähnter Art ein bestimmtes Verhältniß statt finden müsse, und daß aus dem jedesmaligen Verhältnisse zwischen den Nullwerthen — solcher Inkremente, mit mathematischer Gewißheit geschlossen werden könne auf das jedesmal entsprechende Verhältniß, bestehend zwischen den entsprechenden endlichen Werthen — der Wurzeln und dem entsprechenden endlichen Werthe — der jenen Wurzeln zukommenden Funktion.

Alle diese Betrachtungen über das Staunenswerthe an der Entdeckung des Differenzialkalkuls, gewinnen ganz vorzüglich an Werth, wenn man erwäget, daß, an und für sich betrachtet, eine zwischen Nullen angesetzte Gleichung immerhin wahr seyn könne, aber durchaus nichts sagend, aller vernünftigen Folgerung gänzlich unfähig, sey. Wenn ich z. B. $A.o+B.o-C.o=K.o+G.o$ setze, so ist, da Nichts gleich Nichts ist, an der Wahrheit obiger Gleichung zwar nicht zu zweifeln, allein es läßt sich aus derselben eben so wenig folgern, als überhaupt aus der Betrachtung des absoluten Nichts. Jene zwischen mehreren Nichtsen angesetzte Gleichung gewinnt aber sogleich eine tiefe Bedeutung, wenn sie nicht unmittelbar zwischen Nullen angesetzt ward, und wenn sich gleich ursprünglich ihre Wahrheit nicht darauf stützte, daß eine beliebige Anzahl mit beliebigen endlichen Koeffizienten versehener zu einander addirter und von einander abgezogener Nullen gleich seyn müsse einer beliebigen Anzahl mit beliebigen endlichen Koeffizienten versehener zu einander addirter und von einander abgezogener Nullen; sondern wenn die Gleichung durch folgendes Räsonnement entstand:

Aus den Bedingnissen der Aufgabe (z. B. geometrischen Verhältnissen gemäß, oder nach der bestehenden Beziehung zwischen Kräften, Massen, Räumen u. s. w.) besteht z. B. die Gleichung:

$$A\Delta x+Bx\Delta x+G\Delta x^2=My^3\Delta y+Ny^2\Delta y^4,$$

so bleibt sie auch für den Fall wahr, wenn in selbe Δx durchaus durch dx und Δy durchaus durch dy substituirt wird, wo aber dann die Gleichung einer Reduktion fähig wird, und daher folgendermaßen angesetzt werden kann:

$$Adx + Bxdx = My^3 dy.$$

Diese Gleichung ist nun aber keineswegs eine nichtssagende Aequation, sie ist nicht in dem Sinne wahr, daß zwei zusammenaddirte Nullen jederzeit wieder Null geben; sondern es ist die unter den genau bestimmten Nullen dx und dy im oben angegebenen Sinne angesetzte Gleichung nur wahr, wenn dx und dy in der Kombination

$$Adx + Bxdx = My^3 dy$$

angesetzt werden; nicht aber wäre, im oben angegebenen Sinne, die zwischen dx und dy angesetzte Gleichung wahr, wenn sie z. B. so lauten möchte:

$$Hdx + Cx^m dx - Kx^e dx = Ny^4 dy + Gydy,$$

ob diese Aequation gleich in einem andern Sinne vollkommen wahr wäre, nämlich in jenem, wo dx und dy als unbestimmte Nullen betrachtet würden, in dem Sinne nämlich, in welchem die Gleichung

$$A.o + B.o - C.o = K.o + G.o$$

angesetzt ward. Hieraus sieht man aber auch ein, wie aus einer im Sinne des Differenzialkalkuls angesetzten, Gleichung zwischen Nullen, gefolgert werden könne auf eine entsprechende Gleichung zwischen endlichen Werthen, worüber weiter unten ein Mehreres (Geist der Differenzial-, Integral-, und Variations-Rechnung).

Maximum und Minimum.

Nach Delagrange's Bezeichnungsweise läßt sich das Taylor'sche Theorem so ansetzen:

$$F(x \pm \omega) = F(x) \pm \omega F(x') + \frac{\omega^2}{2} F(x'') \pm \frac{\omega^3}{2.3} F(x''') + \frac{\omega^4}{2.3.4} F(x'''') \pm \ldots;$$

Nun ist allemal für ω ein endlicher Werth möglich, der klein genug ist, daß wenn er oder jeder kleinere in obige Reihe substituirt wird, $\omega F(x')$ größer wird, als die Summe aller nachfolgenden ins Unendliche fortgesetzten Glieder; dasselbe gilt von $\frac{\omega^2}{2} F(x'')$ in Bezug auf die nachfolgenden Glieder, u. s. w. Hat daher die Wurzel x der Funktion $F(x)$ einen solchen Werth, daß $F(x') = o$ und zugleich $F(x'') = -$, oder daß $F(x') = o$ dann $F(x'') = o$ dann $F(x''') = o$ und zugleich $F(x'''') = -$, oder daß u. s. w.; so muß $F(x)$, durch ein sehr geringes Zunehmen sowohl als durch ein sehr geringes Abnehmen von x, abnehmen, d. h. es ist $F(x)$ bei obbesagtem Werthe von x ein Maximum. Aehnlichen Betrachtungen zufolge ist $F(x)$ bei jedem solchen Werthe von x ein Minimum, bei welchem Werthe $F(x') = o$

und zugleich $F(x'')=+$, oder $F(x')=0$ dann $F(x'')=0$ dann $F(x''')=0$ und zugleich $F(x'''')=+$ ist. U. s. w.*).

Nachbemerkung zur Lehre de maximis et minimis.

In $F(x,y)$ seyen x und y unter einander in keiner wechselseitigen Relation, so daß in obige Funktion statt x beliebig ein Werth substituirt werden kann, und zugleich beliebig ein Werth für y; wornach auch x um ein beliebiges Quantum zu- oder abnehmen kann, ohne daß hierdurch für y ein positives oder negatives Inkrementum postulirt wäre. In solchem Falle ist, für Bestimmung des maximum's oder minimum's an $F(x,y)$, der Werth sowohl von x festzusetzen, als auch zugleich jener von y. Indem man nun den eigentlichen Sinn des auch zugleich äußerst schlau erdachten Wesens einer Funktion genau erwäget, und zwar einer Funktion von einer Variabeln oder von mehrern veränderlichen Größen, unter welchen letztere aus den Bedingnissen der Aufgabe entweder eine Gleichung $x=\varphi(y)$ besteht oder nicht, wo im ersten Falle $F(x,y)=F(\varphi(y),y)=f(y)$ angesetzt werden kann, u. s. w.; wenn man dieß Alles, seinem Geiste nach, klar auffaßt, so sieht man die Richtigkeit folgender Methode ein:

Blos in Bezug auf die Veränderlichkeit von x sey $F(x,y)$ ein maximum für $x=f(y)$; ferner blos in Bezug auf die Veränderlichkeit von y sey $F(x,y)$ ein maximum für $y=f(x)$; so ist $F(x,y)$ ein maximum, in Bezug sowohl auf die Veränderlichkeit von x als auf jene von y, für $x=f(f(x))=\psi(x)$ und für $y=f(f(y))=\lambda(y)$, aus welchen beiden Gleichungen $x=A$ und $y=B$ erhalten werden möge. U. s. w.

Konvexität, Konkavität.

Ungemeinen Scharfsinn und hohen Grad subtiler exaktwissenschaftlicher abstrakter Anschauung bieten jene Partieen aus der analytischen Geometrie dar, wo von Konvexität, Konkavität, Wendungspunkt, Spitze, konjungirtem Punkte, Masche, Schleife, u. s. w., und überhaupt von demjenigen, die Rede ist, das die neuern französischen Geometer point singulier benannten.

---

*) Anmerk. Um den Sinn des oben Entwickelten genau zu fassen, ist Folgendes zu merken: $F(x)$ als Ordinate einer Abscisse x betrachtet, heißt in allen jenen Fällen Maximum, wo die positive Ordinate zwischen zwei kleinern positiven Ordinaten steht, oder wo die negative Ordinate zwischen zwei größern negativen Ordinaten steht. Aehnliches bezieht sich aufs positive und negative Minimum u. s. w.

Bezeichnen wir, allgemein für jede Kurve, die Abscisse durch x, die dazu gehörige Ordinate durch y, und die Länge des zu x so wie zu y gehörigen rektifizirten Kurvenstücks durch s, so ist für jene Werthe von x, oder für jene Werthe von y, wobei $\frac{dy}{dx} = o$ wird, wegen des hier zu Null werdenden Winkels zwischen ds und dx oder zwischen der dem x entsprechenden Tangente und Subtangente, die Tangente parallel zur Abscissenaxe gelagert, und zugleich sind dann drei Fälle möglich: 1) der Endpunkt des Kurvenstücks s fällt in eine der Konvexitäten, 2) oder er fällt in eine der Konkavitäten der Kurven, 3) oder er ist ein Wendungspunkt; d. h. es ist entweder die Ordinate y ein maximum oder ein minimum oder keines von beiden. Eine genaue Betrachtung der Taylor'schen Formel lehrt, daß jene dreierlei Fälle unter folgenden Bedingungen eintreten werden: 1) wenn $y' = o$ und zugleich $y'' = z -$ ist, 2) wenn $y' = o$ und zugleich $y'' = +$ ist, 3) wenn $y' = o$ und zugleich $y'' = o$ ist, wenn aber y''' einen positiven oder negativen endlichen Werth hat (wobei wir nach Delagrange die erste, zweite und dritte abgeleitete Funktion des $y = f(x)$ bezeichnet haben).

Allein die analytische Geometrie giebt nicht nur an, wo eine Konvexität oder eine Konkavität statt finde, sondern überdieß auch noch, in welchem Grade die Kurve sich in jedem Punkte krümme. Dieß geschieht durch Betrachtung des veränderlichen Werthes an dem so sinnreich ersonnenen Krümmungshalbmesser

$$s = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{dx}{-d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{ds^3}{dy^2 . d\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{ds^3}{-dx^2 . d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

welcher bei der Kreislinie einen konstanten endlichen Werth behauptet, und bei der geraden Linie $= \infty$ wird. Im Obigen ist dx durchaus als konstantes Differenzial betrachtet.

Fundamentalformel der Derivationsrechnung des Delagrange.

Die Entwicklung der merkwürdigen, mit Taylor's Formel übereinstimmenden, Fundamentalformel aus Delagrange's théorie des fonctions analytiques, kann vorzüglich dazu dienen, den Uebergang aus der ältern in die neuere Methode, an der höhern Analysis, zu zeigen.

Bestehe die Funktion von x, F(x) so sieht man leicht ein, daß wenn darin x um das beliebige Stück ω wächst, man $F(x+\omega)$ erhalte; nun ist $F(x+\omega) = F(x) + F(x+\omega) - F(x) = F(x) + \left(\frac{F(x+\omega)}{\omega} - \frac{Fx}{\omega}\right)\omega$, welches wir ausdrücken wollen durch $F(x) + f(x,\omega)\omega$; es läßt sich demnach allgemein $F(x+\omega) = F(x) + f(x,\omega).\omega$ setzen, woselbst $f(x,\omega) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega}$; hier ist zu merken: es kann in $f(x,\omega)$ das ω mit keinen gebrochenen

Exponenten vorkommen, denn wenn jedem x nur ein Werth für $F(x)$ entspricht, so kann auch jedem $x+\omega$ nur ein Werth für $F(x+\omega)$ entsprechen, es hätte aber $F(x+\omega)$ oder $F(x)+f(x,\omega).\omega$ mehrere Werthe für ein und dasselbe ω, wenn in $f(x,\omega).\omega$ das ω mit gebrochenen Exponenten vorkäme; ferner: es kann in $f(x,\omega)$ kein ω mit einem negativen Exponenten im Zähler, oder mit einem positiven Exponenten im Nenner vorkommen; denn unter dieser Voraussetzung folgte aus der Gleichung $F(x+\omega)=F(x)+f(x,\omega).\omega$, welche doch für jeden Werth von ω wahr seyn muß, für jenen einzelnen Fall eine Ungereimtheit, wo man $\omega=0$ annehmen möchte; denn sey $f(x,\omega)=f(x)\omega^{-1}=\frac{f(x)}{\omega}$ so folgt aus $F(x+\omega)=F(x)+f(x,\omega)\omega$ oder $F(x+\omega)=F(x)+\frac{f(x)}{\omega}.\omega=F(x)+f(x)$ für $\omega=0$, $F(x+0)$ oder $F(x)=F(x)+f(x)$; oder sey $f(x,\omega)=f(x)\omega^{-2}=\frac{f(x)}{\omega^2}$, so folgt aus $F(x+\omega)=F(x)+f(x,\omega)\omega$ oder $F(x+\omega)=F(x)+\frac{f(x)}{\omega^2}.\omega=F(x)+\frac{f(x)}{\omega}$ für $\omega=0$, $F(x+0)$ oder $F(x)=F(x)+$ $+\frac{f(x)}{0}=\infty$; oder sey $f(x,\omega)=\frac{f(x)}{\omega}+f^{+}(x)$, so folgt aus $F(x+\omega)=F(x)+f(x,\omega)\omega$ oder $F(x+\omega)=F(x)+\left(\frac{f(x)}{\omega}+f^{+}(x)\right)\omega=F(x)+f(x)+f(x)+f^{+}(x).\omega$ für $\omega=0$, $F(x+0)$ oder $F(x)=F(x)+f(x)+0=F(x)+f(x)$; 2c. Es ist demnach der Ausdruck $F(x+\omega)-F(x)$, welcher durch ω dividirt jenen $f(x,\omega)$, giebt, allemal so beschaffen, daß ω ein allgemeiner Faktor desselben ist; denn wäre dies nicht, so bliebe allemal in irgend einem Gliede des Ausdrucks $\frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}$ oder $f(x,\omega)$ das ω im Nenner; wäre z. B. $F(x+\omega)-F(x)=f(x)\omega^2+f^{+}(x)-f^{++}(x)\omega^3$ so wäre $\frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}$ oder $f(x,\omega)=$ $f(x)\omega+\frac{f^{+}(x)}{\omega}-f^{++}(x)\omega^2$. Nun läßt sich ferners auch behaupten, daß sich $f(x,\omega)$ allemal durch eine Funktion blos von x, worin kein ω vorkömmt, plus einer Funktion von x und ω multiplizirt mit ω, welches wir so ausdrücken: $f(x,\omega)=F(x)+f(x,\omega).\omega$ darstellen lasse, woselbst zu merken, daß $F(x)$ jene Funktion von x ausdrückt, welche entsteht, wenn man in $f(x,\omega)$ statt ω gleich Null substituirt, nämlich $F_1(x)=f(x,0)$ oder $\overset{\omega=0}{f(x,\omega)}$, ferner ......; ferner das in $f_1(x,\omega)$ das ω mit keinen gebrochenen noch negativen Exponenten im Zähler oder positiven Exponenten im Nenner vorkommen kann; ersteres nicht, weil sonst $f(x,\omega)$ für einerlei ω mehrere Werthe hätte, und Letzteres nicht, weil dann für den

Fall $\omega=o$, $f(x,o)=$ (da $F_1(x)=f(x,o)$) $=f(x,o)+$ einer endlichen oder gar unendlichen Größe würde; es ist also ω ein allgemeiner Faktor des Ausdruckes $f(x,\omega)-F(x)$ indem aus $f(x,\omega)=F_1(x)+f_1(x,\omega).\omega$ folgt, $f_1(x,\omega)=\frac{f(x,\omega)-F_1(x)}{\omega}$; eben so läßt sich $f_1(x,\omega)$ durch eine Funktion blos von x plus einer Funktion von x und ω multiplizirt mit ω, gleich setzen, welches wir durch $f_1(x,\omega)=F_2(x)+f_2(x,\omega).\omega$ ausdrücken, woselbst wieder das zu bemerken als vorhin.....; man wird demnach den Sinn und die Eigenschaften folgender Formel leicht begreifen:

$F(x)$

$$F(x+\omega)=F(x)+f(x,\omega).\omega\ (F(x)=F(x+o))$$

$$f(x,\omega)=\frac{F(x+\omega)-F(\omega)}{\omega}$$

$$f(x,\omega)=F_1(x)+f_1(x,\omega).\omega\ (F_1(x)=f(x,o))$$

$$f_1(x,\omega)=\frac{f(x,\omega)-F_1(x)}{\omega}$$

$$f_1(x,\omega)=F_2(x)+f_2(x,\omega).\omega\ (F_2(x)=f_1(x,o))$$

$$f_2(x,\omega)=\frac{f_1(x,\omega)-F_2(x)}{\omega}$$

$$f_2(x,\omega)=F_3(x)+f_3(x,\omega).\omega\ (F_3(x)=f_2(x,o))$$

$$f_3(x,\omega)=\frac{f_2(x,\omega)-F_3(x)}{\omega}$$

u. s. w.

Um von dem hier Gesagten vollkommen überzeugt zu seyn, mache ich hier auf folgende allgemein richtigen Wahrheiten aufmerksam: es sey $f(x,\omega)$ was immer für eine Funktion von x und ω, so ist allemal folgende Gleichung wahr

$$f(x,\omega)=f(x,o)+f(x,\omega)-f(x,o)=f(x,o)+\left(\frac{f(x,\omega)-f(x,o)}{\omega}\right)\omega=f(x,o)+\omega$$

multiplizirt mit einer Funktion von x und ω, welche wir hier durch $f_1(x,\omega)$ ausdrücken wollen; es kann also allgemein behauptet werden, $f(x,\omega)=f(x,o)+f_1(x,\omega)\,\omega$, welche Gleichung wahr seyn muß, es mag darin durchaus ω was immer für einen Werth haben, also auch wenn $\omega=o$; es muß also die Gleichung wahr seyn, $f(x,o)=f(x,o)+f_1(x,o).o$, welche Gleichung jedoch nur unter der Voraussetzung keine Ungereimtheiten enthalten wird, wenn $f_1(x,o).o$ wirklich Null ist, welches aber nur dann seyn kann, wenn in $f_1(x,\omega)\omega$ der Faktor $f_1(x,\omega)$ im Nenner kein ω mit positiven Exponenten enthält; denn wäre z. B. $f_1(x,\omega)=\frac{f(x)}{\omega}$, so wäre $f_1(x,\omega)\omega=\frac{f(x)}{\omega}.\omega$ also $\overbrace{f_1(x,\omega)\omega}^{\omega=o}$ oder $f_1(x,o)o=f(x)$;

wäre $f_1(x,\omega) = \frac{f(x)}{\omega^2} + f^+(x)$ so wäre $f_1(x,\omega)\,\omega = \frac{f(x)}{\omega} + f^+(x)\,\omega$ also $f_1(x,o)\,o = \frac{f(x)}{o} + f^+(x)\,o = \infty$; wäre........

$F(x+\omega) = F(x) + f(x,\omega)\,\omega$, oder

$F(x+\omega) = F(x) + (F_1(x) + f_1(x,\omega)\,\omega)\,\omega = F(x) + F_1(x)\,\omega + f_1(x,\omega)\,\omega^2$, oder

$F(x+\omega) = F(x) + F_1(x)\,\omega + (F_2(x) + f_2(x,\omega)\,\omega)\,\omega^2 =$

...... $= F(x) + F_1(x)\,\omega + F_2(x)\,\omega^2 + f_2(x,\omega)\,\omega^3$, oder

$F(x+\omega) = F(x) + F_1(x)\,\omega + F_2(x).\omega^2 + (F_3(x) + f_3(x,\omega)\,\omega)\,\omega^3 =$

$= F(x) + F_1(x).\omega + F_2(x)\,\omega^2 + F_3(x).\omega^3 + f_3(x,\omega)\,\omega^4$, oder......

$F(x+\omega) = F(x) + \omega.F_1(x) + \omega^2.F_2(x) + \omega^3.F_3(x) + \omega^4.F_4(x) + \omega^5.F_5(x) +$ etc.

wir wollen nun hier allgemein die Koeffizienten $F(x), F_1(x), F_2(x)$...... der in den Gliedern dieser Reihe vorkommenden steigenden Potenzen von ω bestimmen, welches DeLagrange auf folgende Art thut: es folgt aus dem eben Gesagten:

$F(x+\omega'') = F(x) + F_1(x).\omega'' + F_2(x).\omega''^2 + F_3(x).\omega''^3 + F_4(x).\omega''^4 + \ldots$

und eben so

$F(x'+\omega) = F(x') + F_1(x').\omega + F_2(x').\omega^2 + F_3(x').\omega^3 + F_4(x').\omega^4 + \ldots$

oder wenn man ω'' durch $\omega+\omega'$ und x' durch $x+\omega'$ ausdrückt, so folgt auch die Richtigkeit folgender zwei Gleichungen:

$F(x+(\omega+\omega')) = F(x) + F_1(x).(\omega+\omega') + F_2(x).(\omega+\omega')^2 + F_3(x).(\omega+\omega')^3 + \ldots$

$F((x+\omega')+\omega) = F(x+\omega') + F_1(x+\omega').\omega + F_2(x+\omega').\omega^2 + F_3(x+\omega').\omega^3 + \ldots$

Da aber $F(x+(\omega+\omega'))$ und $F((x+\omega')+\omega)$ eine und dieselbe Größe ist, so müssen auch die derselben gleichgesetzten zwei Reihen unter einander gleich seyn, man mag in diesen beiden Reihen durchaus was immer für einen Werth für ω und zu gleicher Zeit durchaus was immer für einen Werth für ω' annehmen; es folgt aber aus

$F(x+(\omega+\omega')) = F(x) + F_1(x).(\omega+\omega') + F_2(x).(\omega+\omega')^2 + F_3(x).(\omega+\omega')^3 + \ldots$

daß $F(x+(\omega+\omega')) = F(x) + F_1(x).\omega + F_2(x).\omega^2 + F_3(x).\omega^3 + F_4(x).\omega^4 + \ldots$

$+ F_1(x).\omega' + 2F_2(x).\omega.\omega' + 3F_3(x).\omega^2.\omega' + 4F_4(x).\omega^3.\omega'$

....

und eben so aus

$F((x+\omega')+\omega) = F(x+\omega') + F_1(x+\omega').\omega + F_2(x+\omega').\omega^2 + F_3(x+\omega').\omega^3 + \ldots$

daß $F((x+\omega')+\omega) = F(x) + F_1(x).\omega + F_2(x).\omega^2 + F_3(x).\omega^3 + F_4(x).\omega^4 \ldots$

$+ F_1(x).\omega' + F_1'(x).\omega.\omega' + F_2'(x).\omega^2.\omega' + F_3'(x)\,\omega^3.\omega'$

....

denn $F(x+\omega') = F(x) + F_1(x)\,\omega' + F_2(x)\,\omega'^2 + \ldots$

ferner $F_1(x+\omega')\,\omega = (F_1(x) + F'_1(x)\,\omega' + F_1^2(x)\,\omega'^2 + \ldots)\,\omega =$

$= F_1(x)\,\omega + F_1'(x)\,\omega.\omega' + F_1^2(x)\,\omega.\omega'^2 + F_1^3(x)\,\omega.\omega'^3 + \ldots\ldots$

ferner $F_2(x+\omega')\omega^2=(F_2(x)+F_2'(x)\omega'+F_2^2(x)\omega'^2+F_2^3(x)\omega'^3+\ldots\ldots)\omega^2=$

$$=F_2(x)\omega^2+F_2'(x)\omega^2.\omega'+F_2^2(x)\omega^2.\omega'^2+F_2^3(x)\omega^2.\omega'^3+\ldots\ldots$$

ferner $F_3(x+\omega')\omega^3=(F_3(x)+F_3'(x)\omega'+F_3^2(x)\omega'^2+\ldots\ldots\ldots\ldots)\omega^3=$

$$=F_3(x)\omega^3+F_3'(x)\omega^3.\omega'+F_3^2(x)\omega^3.\omega'^2+\ldots\ldots;$$

es besteht also eine identische Gleichung zwischen den Reihen

$$F(x)+F_1(x).\omega+F_2(x).\omega^2+F_3(x).\omega^3+F_4(x).\omega^4+\ldots\ldots$$
$$+F_1(x).\omega'+2F_2(x).\omega.\omega'+3F_3(x).\omega^2.\omega'+4F_4(x).\omega^3.\omega'+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und $F(x)+F_1(x).\omega+F_2(x).\omega^2+F_3(x).\omega^3+F_4(x).\omega^4\ldots\ldots$

$$+F_1(x).\omega'+F_1'(x).\omega.\omega'+F_2'(x).\omega^2.\omega'+F_3'(x)\omega^3.\omega'\ldots\ldots\ldots\ldots$$

es ist also $F_1(x)=F_1(x);\ 2F_2(x)=F_1'(x);\ 3F_3(x)=F_2'(x);\ 4F_4(x)=F_3'(x);\ldots$

daher $F_1(x)=F_1(x);\ F_2(x)=\frac{F_1'(x)}{2};\ F_3(x)=\frac{F_2'(x)}{3};\ F_4(x)=\frac{F_3'(x)}{4};\ldots\ldots$

Das hier Gesagte läßt sich blos algebraisch kurz so anzeigen:

$$F(x+\omega)=F(x)+F_1(x).\omega+F_2(x).\omega^2+F_3(x).\omega^3+F_4(x).\omega^4+\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l} F(x+(\omega+\omega'))=F(x)+F_1(x).(\omega+\omega')+F_2(x).(\omega+\omega')^2+F_3(x).(\omega+\omega')^3\ldots\ldots \\ \qquad =F(x)+F_1(x).\omega+F_2(x).\omega^2+F_3(x).\omega^3+F_4(x).\omega^4\ldots\ldots \\ \qquad\qquad F_1(x).\omega'+2F_2(x).\omega.\omega'+3F_3(x).\omega^2.\omega'+4F_4(x).\omega^3.\omega'\ldots \\ \qquad\qquad + \quad : \quad + \quad : \quad + \quad : \quad + \quad : \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} F((x+\omega')+\omega) & =F(x+\omega') & +F_1(x+\omega').\omega & +F_2(x+\omega').\omega^2 & +F_3(x+\omega').\omega^3+\ldots\ldots & \\ & =F(x) & +F_1(x).\omega & +F_2(x).\omega^2 & +F_3(x).\omega^3+\ldots\ldots & \\ & \quad F_1(x).\omega' & +F_1'(x).\omega.\omega' & +F_2'(x)\omega^2.\omega' & +F_3'(x).\omega^3.\omega'+\ldots\ldots & \\ & \quad F_2(x).\omega'^2 & +F_1^2(x).\omega.\omega'^2 & +F_2^2(x).\omega^2.\omega'^2 & +F_3^2(x).\omega^3.\omega'^2+\ldots\ldots & \\ & \quad : & + \quad : & + \quad : & + \quad : & + \\ & =F(x) & +F_1(x).\omega & +F_2(x).\omega^2 & +F_3(x).\omega^3+F_4(x).\omega^4\ldots & \\ & & \quad F_1(x).\omega' & +F_1'(x).\omega.\omega' & +F_2'(x)\omega^2.\omega'+ & \\ & & \quad +F_3'(x)\omega^3.\omega' & & & \end{array}$$

daher $F_1(x)=F_1(x),\ F_2(x)=\frac{F_1'(x)}{2},\ F_3(x)=\frac{F_2'(x)}{3},\ F_4(x)=\frac{F_3'(x)}{4}\ldots\ldots;$

bemerkt man nun hier daß $F(x+\omega')$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen in ω' aufgelöst dieselben Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von ω' enthalten müsse, als die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von ω in jener Reihe wären, wenn $F(x+\omega)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ω aufgelöst würde, eben so daß $F_1(x+\omega')$ in eine Reihe....... so sieht man hier Folgendes leicht ein: man erhält den Koeffizienten $F_1(x)$, wenn man in jenen $F(x)$ [$F(x)$ ist der Koeffizient von ω^0] das x um ω vermehrt, den dadurch erhaltenen Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ω auflöst, und aus dieser Reihe den Koeffizienten von ω nimmt, welchen Koeffizienten man durch 1 dividirt;

man erhält den Koeffizienten $F_2(x)$, wenn man in jenen $F(x)$ das x um ω vermehrt, den dadurch erhaltenen Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ω auflöst, und aus dieser Reihe den Koeffizienten von ω nimmt, welchen Koeffizienten man durch 2 dividirt; man erhält den Koeffizienten $F_3(x)$, wenn man in jenen $F_2(x)$ das x um ω vermehrt, den dadurch erhaltenen Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ω auflöst, und aus dieser Reihe den Koeffizienten von ω nimmt, welchen Koeffizienten man durch 3 dividirt; man erhält den Koeffizienten $F_4(x)$, wenn man in jenen $F_3(x)$ das x um ω vermehrt, den hiedurch erhaltenen Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ω auflöst, und aus dieser Reihe den Koeffizienten von ω nimmt, welchen Koeffizienten man durch 4 dividirt; man erhält ....

Um also z. B. in

$$F(x+\omega)=F(x)+F_1(x).\omega+F_2(x).\omega^2+F_3(x).\omega^3+F_4(x).\omega^4+\ldots\ldots$$

den Koeffizienten von ω^n zu erhalten, darf man nur aus $F(x)$ auf eine bestimmte Art eine Funktion herleiten, die wir so anzeigen wollen $F'(x)$, ferner aus $F'(x)$ auf dieselbe Art eine Funktion herleiten, die wir so anzeigen wollen $(F'(x))'$ oder $F''(x)$ und diesen Ausdruck durch 2 dividiren, ferner aus $\frac{F''(x)}{2}$ auf dieselbe Art eine Funktion herleiten, die wir so anzeigen wollen $\left(\frac{F''(x)}{2}\right)'$ oder $\frac{F'''(x)}{2}$, und diesen Ausdruck durch 3 dividiren, ferner aus $\frac{\frac{F'''(x)}{2}}{3}=\frac{F'''(x)}{2.3}$, auf dieselbe Art eine Funktion herleiten, die wir so anzeigen wollen $\left(\frac{F'''(x)}{2.3}\right)'$ oder $\frac{F''''(x)}{2.3}$, und diesen Ausdruck durch 4 dividiren, wodurch man erhält $\frac{\frac{F''''(x)}{2.3}}{4}=\frac{F''''(x)}{2.3.4}$; diesen Betrachtungen zu Folge erhält man also:

$$F(x+\omega)=F(x)+F'(x).\omega+\frac{F''(x)}{2}.\omega^2+\frac{F'''(x)}{2.3}.\omega^3+\frac{F''''(x)}{2.3.4}.\omega^4+\ldots\ldots$$

oder

$$F(x+\omega)=F(x)+\omega F'(x)+\frac{\omega^2}{2}.F''(x)+\frac{\omega^3}{2.3}F'''(x)+\frac{\omega^4}{2.3.4}F''''(x)+\ldots\ldots$$

worin die dem $F(x)$ beigesetzten Zeichen ′ ″ ‴ ⁗ ...... bedeuten es sey ein Ausdruck X dadurch entstanden daß man aus $F(x)$ diesen Ausdruck X durch ein- oder zwei- oder drei- oder vier-...malige Ableitung von einerlei Art erhalten habe; nach dieser aufgestellten Regel ist also Delagrange im Stande, die Koeffizienten aller Potenzen von ω in jener Reihe nach steigenden Potenzen von ω anzusetzen, durch welche Reihe irgend eine beliebige Funktion von $x+\omega$ nämlich $F(x+\omega)$ auszudrücken ist, wenn er nur im Stande ist, den

Koeffizienten von ω aus jenem $F(x)$ von ω^0 herzuleiten, welchen Koeffizienten von ω er die erste abgeleitete Funktion von $F(x)$ nennt, so wie er überhaupt die folgenden Koeffizienten von $\frac{\omega^2}{2}, \frac{\omega^3}{2.3}, \frac{\omega^4}{2.3.4}, \ldots\ldots$ zweite abgeleitete Funktion von $F(x)$, dritte abgeleitete Funktion von $F(x)$, vierte abgeleitete Funktion von $F(x) \ldots\ldots$ nennt; sey z. B. $F(x) = x^m$, daher $F(x+\omega) = (x+\omega)^m$, so wäre dieser letzte Ausdruck in eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von ω aufgelöst, nach Delagrange folgendermaßen anzuzeigen:

$$(x+\omega)^m = x^m + \omega (x^m)' + \frac{\omega^2}{2} . (x^m)'' + \frac{\omega^3}{2.3} (x^m)''' + \frac{\omega^4}{2.3.4} . (x^m)'''' + \ldots\ldots$$

Hier sind nun die Koeffizienten $(x^m)'', (x^m)''', \ldots\ldots$ sogleich bekannt, wenn es nur jener $(x^m)'$ ist; um nun diesen zu finden, erhebt Delagrange $(x+\omega)$ zur Potenz 2, dann zu jener 3, dann zu jener 4 ...... und findet daß allgemein $(x+\omega)^m$ eine unendliche Reihe gebe, die so anfängt: $x^m + m x^{m-1} . \omega$, es ist also in obiger Reihe $(x^m)' = m x^{m-1}$, also ist $(x^m)'' =$ [da $m x^{m-1} = 1 . m . x^{m-1}$ und $x^m = 1 . x^m$] $= m . (m-1) x^{(m-1)-1} = m(m-1) x^{m-2}$, eben so $(x^m)''' = m(m-1)(m-2) x^{(m-2)-1} = m(m-1(m-2) x^{m-3}$, eben so $(x^m)'''' = m(m-1)(m-2)(m-3) x^{(m-3)-1} = m(m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4}, \ldots\ldots$ es ist demnach

$$(x+\omega)^m = x^m + \omega . m x^{m-1} + \frac{\omega^2}{2} . m . (m-1) x^{m-2} + \frac{\omega^3}{2.3} m(m-1)(m-2) x^{m-3} + $$

$$+ \frac{\omega^4}{2.3.4} m(m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4} + \ldots\ldots,$$ welches mit der Neutonischen Binomialformel vollkommen übereinstimmt; auch erhält man ganz dasselbe durch die Taylorische Formel, denn da selbige allgemein so ausgedrückt ist:

$$F(x+\omega) = F(x) + \omega . \frac{dF(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{2} . \frac{d^2F(x)}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} \frac{d^3F(x)}{dx^3} + \frac{\omega^4}{2.3.4} . \frac{d^4F(x)}{dx^4} + \ldots\ldots,$$

so ist nach selbiger $(x+\omega)^m = x^m + \omega . \frac{dx^m}{dx} + \frac{\omega^2}{2} . \frac{d^2x^m}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} . \frac{d^3x^m}{dx^3} + \ldots\ldots\ldots$

$$= x^m + \omega . \frac{m x^{m-1} dx}{dx} + \frac{\omega^2}{2} . \frac{m . dx (m-1) x^{m-2} dx}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} \frac{m . dx^2 (m-1)(m-2) x^{m-3} dx}{dx^3} +$$

$+ \ldots\ldots\ldots$

Dieses zeigt a posteriori die Richtigkeit sowohl der Taylor'schen Formel $F(x+\omega) = F(x) + \omega . \frac{dF(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{2} . \frac{d^2F(x)}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} \frac{d^3F(x)}{dx^3} + \frac{\omega^4}{2.3.4} . \frac{d^4F(x)}{dx^4} + \ldots\ldots$ als der Formel des Delagrange: $F(x+\omega) = F(x) + \omega F'(x) + \frac{\omega^2}{2} . F''(x) + \frac{\omega^3}{2.3} F'''(x) + \frac{\omega^4}{2.3.4} F''''(x) + \ldots\ldots$; auch sieht man hier zugleich ein, daß die Ausdrücke $F'(x), F''(x), F'''(x), F''''(x), \ldots\ldots$ oder erste abgeleitete Funktion von $F(x)$, zweite abgeleitete Funktion von $F(x)$, dritte

abgeleitete Funktion von $F(x)$, vierte abgeleitete Funktion von $F(x)$, ... mit andern Zeichen und andern Worten ganz dasselbe sind, als die Ausdrücke

$$\ldots\ldots \frac{dF(x)}{dx}, \frac{d^2F(x)}{dx^2}, \frac{d^3F(x)}{dx^3}, \frac{d^4F(x)}{dx^4}, \ldots\ldots\ldots$$

oder der Koeffizient von dx im ersten Differenzial von $F(x)$, der Koeffizient von dx^2 im zweiten Differenzial von $F(x)$, der Koeffizient von dx^3 im dritten Differenzial von $F(x)$, der Koeffizient von dx^4 im vierten Differenzial von $F(x)$, ...

Den Werth von $\frac{0}{0}$ zu finden, wenn dieß durch gewisse Substitution sich ergiebt.

Es geschieht nicht selten, daß $\overbrace{f(x)=0}^{x=a}$ und zugleich $\overbrace{F(x)=0}^{x=a}$ wird, daß also $\overbrace{\frac{f(x)}{F(x)}}^{x=a}=\frac{0}{0}$ gibt; welcher Ausdruck sehr wohl einem endlichen Werthe entsprechen kann. Diesen zu bestimmen gibt das Folgende an:

Erhält man aus $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x=a$ oder aus $\overbrace{\frac{f(x)}{F(x)}}^{x=a}$ den Ausdruck $\frac{0}{0}$, wenn nämlich $\overbrace{f(x)=0}^{x=a}$ und $\overbrace{F(x)=0}^{x=a}$, und will man diesen Quotienten $\frac{0}{0}$ kennen, so darf man nur Zähler und Nenner differenziren, und in den erhaltenen Bruch $x=a$ substituiren, wodurch z. B. $\frac{A}{B}$ entsteht, so ist $\overbrace{\frac{f(x)}{F(x)}}^{x=a}=\frac{A}{B}$, hätte man aber statt $\frac{A}{B}$ dadurch abermals $\frac{0}{0}$ erhalten, so nehme man vom Zähler und vom Nenner das zweite Differenzial, und substituire in den erhaltenen Bruch $x=a$, wodurch z. B. $\frac{C}{D}$ entsteht, so ist $\overbrace{\frac{f(x)}{F(x)}}^{x=a}=\frac{C}{D}$, u. s. w. Die Richtigkeit dieser Behauptung beruht hierauf:

$$\frac{f(x+\omega)}{F(x+\omega)}=\frac{f(x)+f'(x)\omega+f''(x)\frac{\omega^2}{2}+f'''(x)\frac{\omega^3}{2.3}+f''''(x)\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}{F(x)+F'(x)\omega+F''(x)\frac{\omega^2}{2}+F'''(x)\frac{\omega^3}{2.3}+F''''(x)\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}$$

das ist nahe für jeden Werth von x, also auch für $x=a$, wo dann $f(x)=0$ und $F(x)=0$, daher

$$\frac{\overbrace{f(x+\omega)}^{x=a}}{\overbrace{F(x+\omega)}^{x=a}}=\frac{o+\overbrace{f'(x)}^{x=a}\omega+\overbrace{f''(x)}^{x=a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}{o+\overbrace{F'(x)}^{x=a}\omega+\overbrace{F''(x)}^{x=a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}$$

dieß ist auch wahr für $\omega=o$, daher $\frac{\overbrace{f(x+o)}^{x=a}}{F(x+o)}$ oder $\frac{\overbrace{f(x)}^{x=a}}{F(x)}=$

$$=\frac{\overbrace{f'(x)}^{x=a}+\overbrace{f''(x)}^{x=a}\frac{o}{2}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{o.o}{2.3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{o.o.o}{2.3.4}+\ldots\ldots.}{\overbrace{F'(x)}^{x=a}+\overbrace{F''(x)}^{x=a}\frac{o}{2}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{o.o}{2.3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{o.o.o}{2.3.4}+\ldots\ldots}=\frac{\overbrace{f'(x)}^{x=a}}{F'(x)}$$

nun ist aber $\overbrace{f'(x)}^{x=a}=\frac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dx}$, und $\overbrace{F'(x)}^{x=a}=\frac{\overbrace{dF(x)}^{x=a}}{dx}$, also folgt aus $\frac{\overbrace{f(x)}^{x=a}}{F(x)}=\frac{\overbrace{f'(x)}^{x=a}}{F'(x)}$ daß $\frac{\overbrace{f(x)}^{x=a}}{F(x)}=$

$=\frac{\overbrace{\frac{df(x)}{dx}}^{x=a}}{\frac{dF(x)}{dx}}=\frac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dF(x)}$, wäre also z. B. $\frac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dF(x)}=\frac{A}{B}$, so wäre $\frac{\overbrace{f(x)}^{x=a}}{F(x)}=\frac{A}{B}$ wenn $\overbrace{f(x)}^{x=a}=o$ und $\overbrace{F(x)}^{x=a}=o$ wäre; wäre aber nebstbei $\frac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dF(x)}=\frac{o}{o}$ nämlich $\frac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dx}=o$ und $\frac{\overbrace{dF(x)}^{x=a}}{dx}=o$, oder $\overbrace{f'(x)}^{x=a}=o$ und $\overbrace{F'(x)}^{x=a}=o$, so wäre (wenn $\overbrace{f(x)}^{x=a}=o$, und $\overbrace{F(x)}^{x=a}=o$ wäre)

$$\frac{\overbrace{f(x+\omega)}^{x=a}}{F(x+\omega)}=\frac{o+\overbrace{f'(x)}^{x=a}.\omega+\overbrace{f''(x)}^{x=a}.\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}{o+\overbrace{F'(x)}^{x=a}\omega+\overbrace{F''(x)}^{x=a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}=$$

$$=\frac{o+o.\omega+\overbrace{f''(x)}^{x+a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}{o+o.\omega+\overbrace{F''(x)}^{x=a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}=$$

$$=\frac{\overbrace{f''(x)}^{x=a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}{\overbrace{F''(x)}^{x=a}\frac{\omega^2}{2}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{\omega^3}{2.3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{\omega^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}$$

also $\frac{\overbrace{f(x+o)}^{x=a}}{F(x+o)}$ oder $\frac{\overbrace{f(x)}^{x=a}}{F(x)}=$

$$=\frac{\overbrace{f''(x)}^{x=a}\frac{o^2}{2}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{o^3}{2.3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{o^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}{\overbrace{F''(x)}^{x=a}\frac{o^2}{2}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{o^3}{2.3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{o^4}{2.3.4}+\ldots\ldots}=$$

$$=\frac{\left(\overbrace{f''(x)}^{x=a}+\overbrace{f'''(x)}^{x=a}\frac{o}{3}+\overbrace{f''''(x)}^{x=a}\frac{o^2}{3.4}+\ldots\ldots\ldots\right)\frac{o^2}{2}}{\left(\overbrace{F''(x)}^{x=a}+\overbrace{F'''(x)}^{x=a}\frac{o}{3}+\overbrace{F''''(x)}^{x=a}\frac{o^2}{3.4}+\ldots\ldots\ldots\right)\frac{o^2}{2}}=$$

$$=\frac{\overbrace{f''(x)}^{x=a}}{F''(x)}=\frac{\dfrac{\overbrace{d^2 f(x)}^{x=a}}{dx^2}}{\dfrac{d^2F(x)}{dx^2}}=\frac{\overbrace{d^2 f(x)}^{x=a}}{d^2F(x)}$$, es ist also (wenn $\overbrace{f(x)}^{x=a}=o$ und $\overbrace{F(x)}^{x=a}=o$)

$$\frac{\overbrace{f(x)}^{x=a}}{F(x)}=\frac{\dfrac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dx}}{\dfrac{dF(x)}{dx}}=\frac{\overbrace{df(x)}^{x=a}}{dF(x)}$$, z. B. $=\frac{A}{B}$ oder wenn auch

$$\underbrace{\frac{d\,f(x)}{dx}}_{x=a}=o \text{ und } \underbrace{\frac{d\,F(x)}{dx}}_{x=a}=o \text{ so ist } \underbrace{\frac{f(x)}{F(x)}}_{x=a}=\underbrace{\frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{\frac{d^2 F(x)}{dx^2}}}_{x=a}=\underbrace{\frac{d^2 f(x)}{d^2 F(x)}}_{x=a} \text{ z. B. } = \frac{C}{D} \text{ oder ꝛc.}$$

Funktionenbezeichnung.

Sehr richtig gewählt sind die, in den Schriften der neueren Analytiker vorkommenden, abgekürzten Bezeichnungen für die Funktionen veränderlicher Größen. Hierbei bemerke ich jedoch, daß ich die angenommene Bezeichnungsweise z. B. $f(x, y, a)$, wo x und y Variable hingegen a eine Konstante ausdrücken, mit folgender Bezeichnungsweise, in meinen mathematischen Schriften, vertauschte: $\underbrace{f(x, y, z)}_{z=a}$, welches soviel heißt als: Funktion der Variablen x dann y dann z, in welcher Funktion die Variable z, für den betrachteten einzelnen Fall, der Konstanten a gleichgesetzt ward. In ähnlichem Sinne nehme ich folgende Bezeichnung $\underbrace{\frac{d\,F(x)}{dx}}_{x=a}$, d. h. nachdem von $F(x)$ die erste abgeleitete Funktion erhalten worden, in selbe x durch a substituirt.

Wenn, nach der angenommenen Bezeichnungsweise der Funktionen, gesagt wird:

$$f^m f^n(x) = f^{m+n}(x),$$

so heißt dieß in Worten ausgedrückt: die Variable x auf eine bestimmte durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt, z. B. zu $\sqrt{1+ax}$, dieser Ausdruck wieder auf dieselbe Weise zu einem Ausdrucke verwebt, z. B. zu $\sqrt{1+a\sqrt{1+ax}}$, dieser Ausdruck wieder auf dieselbe Weise zu einem Ausdrucke verwebt, u. s. w. Diese Operation n^{mal} fortgesetzt, ferner der hiedurch letztlich erlangte Ausdruck wieder auf dieselbe durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt, dieser Ausdruck wieder auf dieselbe Weise zu einem Ausdrucke verwebt, u. s. w. Diese Operation m^{mal} fortgesetzt, dieß liefert ganz dasselbe Resultat, als wenn man folgendermaßen operirt: die Variable x auf eine bestimmte durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt, z. B. zu $\sqrt{1+ax}$, dieser Ausdruck wieder auf dieselbe Weise zu einem Ausdrucke verwebt, z. B. zu $\sqrt{1+a\sqrt{1+ax}}$, u. s. w. diese Operation $n+m^{mal}$ fortgesetzt.

Aus $f^m f^n(x) = f^{m+n}(x)$, für $m=1$ und $n=o$, folgt $f^1 f^o(x)$ oder $f f^o(x) = f^{1+o}$ oder $f(x)$, d. h. x Nullmal auf die durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt, oder x unverändert x gelassen, und dieß letztere einmal auf die durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt, gibt $f(x)$.

Aus $ff^0(x) = f(x)$ folgt, daß $f^0(x)$ auf eine bestimmte Art zu einem Ausdrucke verwebt, dasselbe Resultat liefere als wenn x auf dieselbe Art zu einem Ausdrucke verwebt wird; daher nothwendig $f^0(x)$ und x gleichgeltende Größen seyn müssen, $f^0(x) = x$. Das ist auch aus dem Grunde klar, daß x Nullmal zu einem Ausdrucke verwebt, ja unverändert $= x$ bleibe.

Aus $f^m f^n(x) = f^{m+n}(x)$, für $m = 1$ und $n = -1$, folgt $ff^{-1}(x) = f^0(x) = x$, d. h. wenn x auf entgegengesetzte Weise, als durch f angezeigt wird, zu einem Ausdrucke verwebt wird, und wenn das so Erhaltene dann auf die durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt wird, so erhält man, aus den solchermaßen vorgenommenen entgegengesetzten Operationen, das unveränderte x. Wird z. B. mit x eine Operation vorgenommen, die jener entgegengesetzt ist wo x mit a multiplizirt würde, d. h. wird x durch a dividirt, und wird dann mit dem sonach erhaltenen $\frac{x}{a}$ die Operation des Multiplizirens durch a vorgenommen, so erhält man $\frac{x}{a} \cdot a = x$. In eben dem Sinne erhält man aus x^n, durch dessen Differenziren, $nx^{n-1}dx$, und aus $nx^{n-1}dx$, durch dessen Integriren, $n\int x^{n-1}dx = \frac{nx^{n-1+1}}{n-1+1} = \frac{nx^n}{n} = x^n$.

Aus $f^m f^n(x) = f^{m+n}(x)$, für $n = -m$, folgt $f^m f^{-m}(x) = f^0(x) = x$, d. h. wenn x auf eine der durch f angezeigten Weise entgegengesetzte zu einem Ausdrucke verwebt wird, wenn dann der so erhaltene Ausdruck wieder auf vorerwähnte Weise behandelt wird, u. s. w., wenn dieß m^{mal} so vor sich geht; wenn dann das erhaltene Resultat auf die durch f angezeigte Weise zu einem Ausdrucke verwebt wird, wenn ferner der so erhaltene Ausdruck wieder auf vorerwähnte Weise behandelt wird, u. s. w., wenn dieß m^{mal} so vor sich geht, so erhält man wieder x. Wenn man z. B. x durch a dividirt, den Quotienten $\frac{x}{a}$ wieder durch a dividirt, das erhaltene $\frac{x}{a \cdot a}$ dann mit a multiplizirt, und das erhaltene $\frac{x}{a}$ wieder mit a multiplizirt, so erhält man x.

Bezeichnungsweise bei Reihen.

Sinnig ist das Ausdrücken des n^{ten} Gliedes einer Reihe durch u_n, wornach jede Reihe allgemein so angesetzt werden kann: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$; man kann aber in Gedanken die Reihe fortschreiten lassen, nicht blos nach $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$, sondern auch in entgegengesetztem Sinne nach $1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots, -n, \ldots$, wo dann die Reihe so ausgedrückt erscheint:

$\leftarrow \ldots\ldots u_{-n} \ldots\ldots, u_{-3}\, u_{-2}\, u_{-1}\, u_0\, u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5 \ldots\ldots u_n \ldots\ldots \rightarrow$; auch kann in irgend einer Reihe, insoferne alle angesetzten Glieder zu einerlei Reihe wirklich gehören, und in entsprechender Successionsordnung angesetzt sind, wenn allgemein das n^{te} Glied durch $f(n)$ ausgedrückt ist, irgend eines der hinter u_1 stehenden Glieder durch gehörige Substitution gefunden werden, z. B. $u_{-3} = \underbrace{f(n)}_{n=-3}$, oder $u_0 = \underbrace{f(n)}_{n=0}$, u. s. w.

Das so eben Gesagte führt mich dahin, bezüglich des Derivationskalkuls, hier eine sehr interessante Bemerkung zu machen.

Indem wir auf Delagrange's Bezeichnungsweise, in dessen théorie des fonctions analytiques, hindeuten, ist der Sinn folgenden Ansatzes deutlich:

$$F(x),\ F(x'),\ F(x''),\ F(x'''), \ldots\ldots$$

Da nun aus $F(x)$ das $F'(x)$ ganz so abgeleitet ist wie es aus $F'(x)$ das $F''(x)$, wie es aus $F''(x)$ das $F'''(x)$, wie es u. s. w. ist; so ist $F(x)$ ein unmittelbar dem Gliede $F'(x)$ vorangehendes Glied aus der Reihe $F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots\ldots$, also ein Ausdruck, der durch Substitution von $n = 0$ aus $f(n)$ muß gefunden werden können, wenn $f(n)$ das n^{te} Glied oder u_n in der Reihe $F'(x), F''(x), \ldots\ldots$ ausdrückt. Hiemit wäre aber eine neue Integrirungsmethode angegeben, da sich $F(x)$ aus $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ also $F(x)$ aus $dF(x)$ finden ließe. Aehnliche Ansichten entwickelte ich schon vor mehrern Jahren in einer eigenen Schrift *).

Ein Beispiel mag hier zeigen, wie aus der Reihe $F'(x), F''(x), F'''(x), F''''(x), \ldots\ldots$ das dem Gliede $F'(x)$ unmittelbar vorangehende Glied $F(x)$ gefunden werden könne, welches soviel heißt als $F'(x)$ integriren. Setzen wir $F(x) = x^c$, so lautet die durch Derivationsmethode entwickelte Reihe folgendermaßen, (wenn $F(x)$ mit angesetzt wird):

$$x^c,\ \overbrace{c}^{1} x^{c-1},\ c\overbrace{(c-1)}^{2} x^{c-2},\ c(c-1)\overbrace{(c-2)}^{3} x^{c-3},\ c(c-1)(c-2)\overbrace{(c-3)}^{4} x^{c-4}, \ldots\ldots$$

Das n^{te} Glied in der Reihe der derivirten Glieder, vom Gliede cx^{c-1}, als der ersten derivirten Funktion, an gerechnet, lautet so: $1 . c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4) \ldots\ldots (c-(n-1)) . x^{c-n}$. In jedem n^{ten} Gliede hat die Potenz x^{c-n} den Koeffizienten 1 multiplizirt mit n Faktoren; also ist der Koeffizient, bei angenommenem $n = 0$, von $x^{c-n} = x^{c-0} = x^c$ d. h. in $F(x)$, durch 1 auszudrücken; es ist also $F(x) = 1 . x^c = x^c$. Die hier an Reihen angestellte Betrachtung auf Integrirungsmethode bezogen, gibt die Folgerung aus $F'(x)$ oder $\frac{dF(x)}{dx}$ auf $F(x)$ so ausgedrückt: $\int c x^{c-1} . dx$ ist das 0te Glied der Reihe

---

*) Anmerk. Buquoy, eine neue Methode für den Infinitesimalkalkul.

$cx^{c-1}, c(c-1)x^{c-2}, c(c-1)(c-2)x^{c-3}, \ldots\ldots$, folglich das Glied x^c. Dieß stimmt mit den bekannten Grundgleichungen der Integralrechnung überein.

Wollte man die Glieder hinter x^c zurückhin fortsetzen, sie nämlich aus dem Ausdrucke fürs allgemeine oder n^{te} Glied entwickeln, so geschähe dieß nach folgenden Betrachtungen: x erscheint im n^{ten} Gliede mit dem Exponenten $c-n$, also im $(-1)^{ten}$ im $(-2)^{ten}$ u. s. w. Gliede mit dem Exponenten $c-(-1)=c+1$ dann $c-(-2)=c+2$ u. s. w.

Der Koeffizient im n^{ten} Gliede, nämlich jener von x^{c-n}, ist gleich 1 multiplizirt mit n Faktoren, oder ist gleich 1 mit etwas multiplizirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke multiplizirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke multiplizirt, u. s. w., diese Operation bis auf n^{mal} fortgesetzt. Daher ist der Koeffizient im $(-1)^{ten}$ Gliede, nämlich jener von x^{c+1} gleich 1 mit etwas multiplizirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke multiplizirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke multiplizirt, u. s. w., diese Operation bis auf $(-1)^{mal}$ fortgesetzt, d. h. es ist jener Koeffizient gleich 1 mit etwas dividirt, dieß 1^{mal} vollzogen. In eben dem Sinne wäre der Koeffizient im $(-2)^{ten}$ Gliede gleich 1 mit etwas multiplizirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke multiplizirt, diese Operation bis auf $(-2)^{mal}$ fortgesetzt, d. h. gleich 1 mit etwas dividirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke dividirt. In eben dem Sinne wäre der Koeffizient im $(-3)^{ten}$ Gliede gleich 1 mit etwas dividirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke dividirt, dann noch mit einem andern Ausdrucke dividirt. In eben u. s. w.

Es handelt sich nun darum, am Koeffizienten (der Potenz von x) im (-1ten) Gliede jenen Ausdruck zu bestimmen, mit welchem die Zahl 1 zu dividiren ist, oder mit welchem die Zahl 1 in negativem Sinne zu multipliziren ist. Betrachten wir am Koeffizienten (der Potenz von x) im n^{ten} Gliede Alles von links nach rechts hin, so sind die Ausdrücke $c, (c-1), (c-2)$, u. s. w. fortzusetzen bis zum Ausdrucke $(c-(n-1))$, also im $(-1)^{ten}$ Gliede bis zum Ausdrucke $(c-(-1-1))=(c-(-2))=(c+2)$. Betrachten wir hingegen am Koeffizienten im n^{ten} Gliede Alles von rechts nach links hin, so sind die Ausdrücke $(c-(n-1)), \ldots\ldots, (c-4), (c-3)$, u. s. w. fortzusetzen bis zu dem von n unabhängigen konstanten Ausdrucke c, also im $(-1)^{ten}$ Gliede auch bis zu dem von (-1) unabhängigen konstanten Ausdrucke c. Der im $(-1)^{ten}$ Gliede enthaltene, aus nur einem Ausdrucke bestehende, Koeffizient muß also dem Ausdrucke $(c+2)$ und zugleich jenem c entsprechen, d. h. jener Koeffizient muß dem Mittelausdrucke aus beiden Ausdrücken $(c+2)$ und c entsprechen, d. h. dem Ausdrucke $\frac{c+2+c}{2}=c+1$. Es ist also im $(-1)^{ten}$ Gliede unserer Reihe die Potenz x^{c+1} durch $c+1$ zu dividiren, und es wird sonach das $(-1)^{te}$ Glied so lauten $=\frac{x^{c+1}}{c+1}$.

Um die 2 in negativem Sinne zunehmenden Faktoren, d. h. um die 2 Nenner im $(-2)^{ten}$

Gliede zu finden (versteht sich im Koeffizienten der Potenz von x), raisonnire man so: gleichwie im 2ten im 3ten im 4ten Gliede u. s. w. der Ausdruck c durchgehends erscheint, eben so muß im $(-2)^{ten}$ im $(-3)^{ten}$ im $(-4)^{ten}$ Gliede u. s. w. der Ausdruck $(c+1)$ durchgehends erscheinen. Gleichwie ferner der nebst c bestehende Ausdruck, im 2ten Gliede, aus c dadurch entsteht, daß c um 1 vermindert ist; eben so muß der nebst $(c+1)$ bestehende Ausdruck, im $(-2)^{ten}$ Gliede, aus $(c+1)$ dadurch entstehen, daß $(c+1)$ um 1 in negativem Sinne vermindert ist, d. h. daß $(c+1)$ um 1 vermehrt ist, daher der in Rede stehende Ausdruck so lautet $=(c+2)$. Es ist also das $(-2)^{te}$ Glied $=\frac{x^{c+2}}{(c+2)(c+1)}$.

Um die 3 in negativem Sinne zunehmenden Faktoren, d. h. um die 3 Nenner im $(-3)^{ten}$ Gliede zu finden, raisonnire man auf ähnliche Art wie zuvor, u. s. w.

Die von x^c an rückschreitende Reihe ist also folgendermaßen anzusetzen:

$$\leftarrow \ldots\ldots, \frac{x^{c+3}}{(c+3)(c+2)(c+1)}, \frac{x^{c+2}}{(c+2)(c+1)}, \frac{x^{c+1}}{(c+1)}, x^c, \ldots\ldots\ldots \rightarrow$$

Hier kann man sich nun leicht überzeugen, daß x^c die erste abgeleitete Funktion von $\frac{x^{c+1}}{(c+1)}$ ist, daß $\frac{x^{c+1}}{(c+1)}$ die erste abgeleitete Funktion von $\frac{x^{c+2}}{(c+2)(c+1)}$ ist, u. s. w., so wie z. B. $c(c-1)(c-2)x^{c-3}$ [in der fortwärts schreitenden Reihe] die erste abgeleitete Funktion ist von $c(c-1)x^{c-2}$ u. s. w. So wie also z. B. das 3te Glied die erste abgeleitete Funktion des 2ten Gliedes ist; eben so ist das $(-2)^{te}$ Glied die erste abgeleitete Funktion des $(-3)^{ten}$ Gliedes, d. h. eben so ist das (-3te) Glied die erste abgeleitete Funktion des $(-2)^{ten}$ Gliedes, aber eine in entgegengesetztem Sinne als zuvor abgeleitete Funktion. Denn wenn durch in entgegengesetztem Sinne genommene Ableitung das Glied u_{-3} aus dem Gliede u_{-2} entsteht, so muß durch die ursprünglich angenommene Ableitung das Glied u_{-2} aus dem Gliede u_{-3} wieder zurück entstehen, und umgekehrt.

Reihen-Konvergenz.

Eine sehr scharfsinnige und für die Anwendung höchst wichtige Lehre ist die von der Konvergenz der unendlichen Reihen, nämlich von jener Qualifikation der Reihen, wornach deren Glieder ins Unendliche fort genugsam abnehmen, daß die Summe S_∞ ihrer (der Reihe) unendlich vielen Glieder einen endlichen Werth habe, daß daher die Summe S_n einer endlichen Anzahl n von Anfangsgliedern, die allemal nur einen endlichen Werth haben kann, im Stande ist, sich jenem endlichen Werthe zu nähern, durch welchen die Summe der unendlich vielen Glieder ausgedrückt ist.

Wie solche Annäherung dadurch zunehme, daß man die Anzahl n der zusammenaddirten Glieder vermehrt, dieß wird, unter andern, auf eine sehr geistreiche Weise, von der geometrischen Reihe für den Fall gezeigt, wo der Quotient q kleiner als 1 ist.

Es ist nämlich, in der geometrischen Reihe

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots\ldots aq^{n-1} \ldots\ldots,$$

die Summe S_n der bis zum Gliede aq^{n-1} fortgesetzten Reihe so ausgedrückt:

$$S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n;$$

ist daher $q < 1$, so ist für $n = \infty$ die Summe $S_\infty = \frac{a}{1-q}$; diesem Ausdrucke nähert sich aber allmählig jener $S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n$; wenn n nach und nach zunimmt, da hiedurch fortan $\frac{a}{1-q} \cdot q^n$ kleiner wird.

Allgemeinste Methode,
eine Funktion in verschiedenartige Reihen zu entwickeln.

Schon Taylor's merkwürdige Formel [nach Delagrange ausgedrückt] $F(x+\omega) = F(x) + \omega F'(x) + \frac{\omega^2}{2} F''(x) + \frac{\omega^3}{2.3} F'''(x) + \ldots\ldots$ liefert eine sehr allgemeine Methode, F(x) in eine Reihe zu entwickeln; denn da obige Gleichung für jeden Werth von x und zugleich für jeden Werth von ω wahr bleibt, so ist auch, für x = o und für ω = x, Folgendes richtig:

$$F(x) = \underbrace{F(x+\omega)}_{x=o,\,\omega=x} = \underbrace{F(x)}_{x=o} + x\underbrace{F'(x)}_{x=o} + \frac{x^2}{2}\underbrace{F''(x)}_{x=o} + \frac{x^3}{2.3}\underbrace{F'''(x)}_{x=o} + \ldots\ldots,$$

welches die Formel Maclaurin's ist, wornach auch Folgendes sich ergibt: Setze $\underbrace{x = \frac{1}{z}}$, daher $z = \frac{1}{x}$, so ist $F(x) = \varphi(z)$, also ist:

$$\varphi(z) = \underbrace{\varphi(z)}_{z=o} + z\underbrace{\varphi'(z)}_{z=o} + \frac{z^2}{2}\underbrace{\varphi''(z)}_{z=o} + \frac{z^3}{2.3}\underbrace{\varphi'''(z)}_{z=o} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder:

$$\varphi(z) = A + B.z + C.\frac{z^2}{2} + D.\frac{z^3}{2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder:

$$F(x) = A + B.\frac{1}{x} + C.\frac{1}{2x^2} + D.\frac{1}{2.3x^3} + \ldots\ldots\ldots$$

Allein von noch weit allgemeinerer Form wird die Reihenentwicklung, wenn von Soldners sinnreicher Formel, in ähnlichem Sinne als von Taylor's Formel, Gebrauch gemacht wird.

Herr Soldner hat in seiner exposition d'une nouvelle formule transcendente ....., folgenden höchst allgemeinen Ausdruck entwickelt, worin $F(x)$ und $f(x)$ irgend zweierlei Funktionen von x bezeichnen (dx ist hier konstant).

$$F(x+\Delta x)=F(x)+(\Delta f(x))\frac{dF(x)}{df(x)}+\frac{(\Delta f(x))^2}{2}\cdot\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}+\frac{(\Delta f(x))^3}{2.3}\cdot\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}\right)}{df(x)}+\ldots\ldots^{*})$$

Wir wollen versuchen, durch zweckmäßige analytische Kunstgriffe, aus dieser Formel anwendbare Resultate zu erhalten.

Obige Gleichung bleibt wahr, wenn durchgehends $x=o$ und $\Delta x=x$ gesetzt wird, welches wir so ausdrücken: $\overbrace{F(x+\Delta x)}^{x=o,\,\Delta x=x}$ oder

$$F(x)=\overbrace{F(x)}^{x=o}+\overbrace{(\Delta f(x))}^{x=o,\,\Delta x=x}\cdot\overbrace{\frac{dF(x)}{df(x)}}^{x=o}+\overbrace{\frac{(\Delta f(x))^2}{2}}^{x=o,\,\Delta x=x}\overbrace{\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}}^{x=o}+\overbrace{\frac{(\Delta f(x))^3}{2.3}}^{x=o,\,\Delta x=x}\ldots\overbrace{\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}\right)}{df(x)}}^{x=o}+\ldots\ldots$$

oder

$$F(x)=\overbrace{F(x)}^{x=o}+(f(x)-\overbrace{(f(x))}^{x=o})\cdot\overbrace{\frac{dF(x)}{df(x)}}^{x=o}+\frac{(f(x)-\overbrace{f(x)}^{x=o})^2}{2}\cdot\overbrace{\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}}^{x=o}+$$

$$+\frac{(f(x)-\overbrace{f(x)}^{x=o})^3}{2.3}\cdot\overbrace{\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dF(x)}{df(x)}\right)}{df(x)}\right)}{df(x)}}^{x=o}+\ldots\ldots$$

---

*) Anmerkung 1. Setzt man $f(x)=x$, so gibt obige Gleichung folgende: $F(x+\Delta x)=F(x)+\Delta x.\frac{dF(x)}{dx}+\frac{(\Delta x)^2}{2}.\frac{d\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)}{dx}+\frac{(\Delta x)^3}{2.3}\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)}{dx}\right)}{dx}+\ldots$, welches Taylors Formel ist.

Anmerkung 2. Soldners Formel ist nur in so ferne wahr, als $f(x)$ eine solche Funktion von x ist, daß $\Delta f(x)$ blos dann $=o$ wird, wenn $\Delta x=o$ ist. Würde z. B. $\Delta f(x)=o$ für $\Delta x=o$ und für $\Delta x=a$, so möchte Soldners Formel auf den Unsinn führen: $F(x+a)=F(x)$.

Bezeichnen wir, Kürze halber, F(x) durch Z und f(x) durch z, ferner, nach De la Grange Théorie des fonctions analytiques, durch Z', Z'', Z''', u. s. w. die 1te 2te 3te u. s. w. abgeleitete Funktion von F(x) und eben so durch z', z'', z''', u. s. w. die 1te 2te 3te u. s. w. abgeleitete Funktion von f(x), so erhalten wir (über $\underbrace{F(x)}_{x=o}$ hinaus) fürs 1te 2te 3te 4te u. s. w. Glied, oder für den Koeffizienten: von $(f(x)-\underbrace{f(x)}_{x=o})$, von $\frac{(f(x)-\underbrace{f(x)}_{x=o})^2}{2}$, von $\frac{(f(x)-\underbrace{f(x)}_{x=o})^3}{2.3}$, von $\frac{(f(x)-\underbrace{f(x)}_{x=o})^4}{2.3.4}$, u. s. w. folgende Ausdrücke, in welche durchgehends x=o zu setzen ist:

fürs 1te Glied $=\left(\frac{Z'}{z'}\right)$, fürs 2te Glied $=\left(\frac{-z''.Z'+z'.Z''}{z'^3}\right)$,

fürs 3te Glied $=\left(\frac{3z''^2.Z'-2z'.z''.Z''+z'^2.Z'''}{z'^5}\right)$, fürs 4te Glied =

$$=\left(\frac{(-15z''^3-6z'.z''.z''')Z'+(-2z'^2.z'''+11z'.z''^2)Z''-5z'^2.z''.Z'''+z'^3.Z''''}{z'^7}\right),$$

fürs 5te Glied $=\frac{1}{z'^9}(\ldots\ldots\ldots\ldots)$, u. s. w.

Wir wollen nun aus der unendlichen Mannichfaltigkeit, welcher, nach Maaßgabe der für f(x) angenommenen Funktion, der Ausdruck für F(x) unterworfen ist, einige Beispiele entwickeln, indem wir nach und nach für f(x)=z verschiedene Funktionen von x annehmen:

I. Setze $f(x)=z=x$.

Hier erhält man: fürs 1te Glied $=\frac{Z'}{1}=Z'$, fürs 2te Glied $=\frac{Z''}{1}=Z''$, fürs 3te Glied $=\frac{Z'''}{1}=Z'''$, u. s. w. Also ist $F(x)=\underbrace{F(x)}_{x=o}+x.\underbrace{F'(x)}_{x=o}+\frac{x^2}{2}.\underbrace{F''(x)}_{x=o}+\frac{x^3}{2.3}.\underbrace{F'''(x)}_{x=o}+\ldots$, wie dieß aus Taylors Formel längst bekannt ist.

II. Setze $f(x)=z=x^m$.

Hier erhält man: fürs 1te Glied $=\left(\frac{Z'}{m x^{m-1}}\right)$,

fürs 2te Glied $=\left(\frac{-(m-1)x^{m-2}.Z'+x^{m-1}.Z''}{m^2.x^{3m-3}}\right)=\left(\frac{-(m-1).Z'+x.Z''}{m^2.x^{2m-1}}\right)$

fürs 3te Glied $=\left(\frac{3(m-1)^2.Z'-2(m-1)x.Z''+x^2.Z'''}{m^3.x^{3m-1}}\right)$,

fürs 4te Glied =

$$=\left(\frac{-3(3m-1)(m-1)^2.Z'+(9m-7)(m-1)x.Z''-5(m-1)x^2.Z'''+x^3.Z''''}{m^4.x^{4m-1}}\right)$$

u. s. w., wonach sich das Weitere finden läßt.

III. Setze $f(x)=z=e^x$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ausdrückt (hier werden alle Potenzen von e^x, für $x=0$, zu 1).

Hier erhält man: fürs 1te Glied $=(Z')$, fürs 2te Glied $=(-Z'+Z'')$, fürs 3te Glied $=$ $=(3Z'-2Z''+Z''')$, fürs 4te Glied $=(-9Z'+9Z''-5Z'''+Z'''')$, u. s. w. Also ist:

$$F(x)=\overbrace{F(x)}^{x=0}+(e^x-1).\overbrace{Z'}^{x=0}+\frac{(e^x-1)^2}{2}.\overbrace{(-Z'+Z'')}^{x=0}+\frac{(e^x-1)^3}{2.3}.\overbrace{(3Z'-2Z''+Z''')}^{x=0}+$$

$$+\frac{(e^x-1)^4}{2.3.4}.\overbrace{(-9Z'+9Z''-5Z'''+Z'''')}^{x=0}+\ldots\ldots\ldots$$

Hiernach läßt sich F(x) für sehr kleine Werthe von x näherungsweise ausdrücken, indem dann obige Reihe konvergirt; ist x gar sehr klein, so läßt sich approximative sogar ansetzen: $F(x)=\overbrace{F(x)}^{x=0}+(e^x-1)\overbrace{F'(x)}^{x=0}$, woraus folgt, daß man für sehr kleine Werthe von x, approximative setzen könne: $e^x=\dfrac{F(x)-\overbrace{F(x)}^{x=0}+\overbrace{F'(x)}^{x=0}}{\overbrace{F'(x)}^{x=0}}$.

IV. Setze $f(x)=z=\log.\text{nat.}(a+x)$.

Hier erhält man: fürs 1te Glied $=(a+x).Z'$, fürs 2te Glied $=(a+x)^2\left(\left(\frac{1}{a+x}\right).Z'+Z''\right)$, fürs 3te Glied $=(a+x)^3\left(\frac{3}{(a+x)^2}.Z'+\left(\frac{2}{a+x}\right).Z''+Z'''\right)$, u. s. w., also ist:

$$F(x)=\overbrace{F(x)}^{x=0}+\left(l:n:\left(\frac{a+x}{a}\right)\right).a.\overbrace{Z'}^{x=0}+\frac{(l:n:(a+x))^2}{2}.a^2.\overbrace{\left(\frac{Z'}{a}+Z''\right)}^{x=0}+$$

$$+\frac{\left(l:n:\left(\frac{a+x}{a}\right)\right)^3}{2.3}.a^3.\overbrace{\left(\frac{3}{a^2}.Z'+\frac{2}{a}.Z''+Z'''\right)}^{x=0}+\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir hier $F(x)=x$, so erhalten wir nach letzterer Gleichung:

$x=a.\left(l:n:\left(\frac{a+x}{a}\right)\right)+\frac{a}{2}\left(l:n:\left(\frac{a+x}{a}\right)\right)^2+\frac{a}{2}\left(l:n:\left(\frac{a+x}{a}\right)\right)^3+\ldots\ldots$; substituiren

wir ferner hierein $\frac{a+x}{a}$ durch $1+\omega$, folglich x durch $a.\omega$, und nehmen ω sehr klein an, so dürfen wir approximative setzen: $a.\omega = a(l:n:(1+\omega)) + \frac{a}{2}(l:n:(1+\omega))^2$, woraus folgt: $l:n:(1+\omega) = \sqrt{1+2\omega} - 1$, und eben so: $l:n:(1-\omega) = \sqrt{1-2\omega} - 1$; also ist: $l:n:\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) = \sqrt{1+2\omega} - \sqrt{1-2\omega}$, welches nur für sehr kleine Werthe von ω approximative gilt, und um so genauer ist, je kleiner ω angenommen wird. Auch läßt sich, unter derselben Voraussetzung, mittelst Entwicklung nach Neutons Binomialformel, sagen: $l:n:\left(\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^m\right) = m.l:n:\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) = m(2\omega+\omega^3)$.

V. Setze $f(x) = z = \mathrm{Sin}(a+x)$, so ist: $F(x) = F(x) + (\mathrm{Sin}(a+x) - \mathrm{Sin}\,a) . \frac{\overbrace{Z'}^{x=0}}{\mathrm{Cos}\,a} +$

$$+ \frac{(\mathrm{Sin}(a+x) - \mathrm{Sin}\,a)^2}{2} . \underbrace{\left(\frac{Z'.\mathrm{Sin}\,a + Z''.\mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Cos}^3\,a}\right)}_{x=0} + \frac{(\mathrm{Sin}(a+x) - \mathrm{Sin}\,a)^3}{2.3} .$$

$$.\underbrace{\left(\frac{3Z'.\sin^2 a + 2Z''.\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,a + Z'''.\mathrm{Cos}^2\,a}{\mathrm{Cos}^5\,a}\right)}_{x=0} + \ldots\ldots\ldots$$

Hier läßt sich recht deutlich zeigen, daß die angewandten Kunstgriffe, um (bei festgesetzten Werthen von x) die Reihe konvergirender zu machen, immer nur die Konvergenz des einen Faktors begünstigen, zugleich aber dem andern Faktor eine größere Divergenz ertheilen. Die Potenzen von $(\mathrm{Sin}(a+x) - \mathrm{Sin}\,a)$ konvergiren schneller, wenn man, bei angenommenem Werthe von x, den Bogen $a+x = \frac{\pi}{2} = 90°$ also den Bogen $a = \frac{\pi}{2} - x$ setzt, als wenn man den Bogen $a < \frac{\pi}{2} - x$ annimmt; allein hiedurch wird in den Koeffizienten der Potenzen von $(\mathrm{Sin}(a+x) - \mathrm{Sin}\,a)$ eine Divergenz oder wenigstens verminderte Konvergenz hervorgebracht, indem als Nenner die Potenzen von Cos a erscheinen, welches Cos a um so kleiner wird, je mehr sich a dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ nähert. Bei gegebenen Ausdrücken von F(x), also in einzelnen Fällen, mag es wohl öfters möglich werden, den Werth von a zu finden, bei welchen (für die Werthe von x innerhalb gewisser Grenzen) ein maximum der Konvergenz in der Reihe statt findet. Es muß nämlich in solchen Fällen, die genommene Konvergenz an den gleichnamigen Faktoren der einen Art, die verlorene Konvergenz an den gleichnamigen Faktoren der andern Art überwiegen.

Aehnliche Betrachtungen, finden überhaupt au den nach Soldners Formel entwickelten unendlichen Reihen statt.

VI. Setze $f(x) = z = \text{Cos}(a+x)$, so ist: $F(x) = \overset{x=o}{F(x)} - (\text{Cos}(a+x) - \text{Cos}\,a) . \dfrac{\overset{x=o}{Z'}}{\text{Sin}\,a} +$

$$+ \frac{(\text{Cos}(a+x) - \text{Cos}\,a)^2}{2} . \left(\frac{-\overset{x=o}{Z'} . \text{Cos}\,a + Z'' . \text{Sin}\,a}{\text{Sin}^3 a} \right) + \frac{(\text{Cos}(a+x) - \text{Cos}\,a)^3}{2.3} .$$

$$. \left(\frac{-3\overset{x=o}{Z'} . \text{Cos}^2 a + 2 Z'' . \text{Cos}\,a . \text{Sin}\,a - Z''' . \text{Sin}^2 a}{\text{Sin}^5 a} \right) + \ldots \ldots$$

VII. Setze $f(x) = z = \text{tang.}(a+x)$, so ist: $F(x) = F(x) + \text{tang.}(a+x) - \text{tang.}\,a) . Z'$.

$$. \text{Cos}^2 a + \frac{(\text{tang}(a+x) - \text{tang}\,a)^2}{2} . (-2\overset{x=o}{Z'} . \text{Sin}\,a . \text{Cos}^3 a + Z'' . \text{Cos}^4 a) +$$

$$+ \frac{(\text{tang}(a+x) - \text{tang}\,a)^3}{2.3} . (12 Z' . \text{Sin}^2 a . \text{Cos}^4 a - 4\overset{x=o}{Z''} . \text{Sin}\,a . \text{Cos}^5 a + Z''' . \text{Cos}^6 a) + \ldots \ldots$$

Unter andern Bemerkungen, deren ähnliche sich auch schon an den früher entwickelten Reihen machen ließen, wollen wir hier nur folgende anführen: wird x unendlich klein angenommen z. B. $= du$, so darf man sagen:

$\overset{x=du}{F(x)} = \overset{x=o}{F(x)} + (\text{tang}(a+du) - \text{tang}\,a) . \overset{x=o}{F'(x)} . \text{Cos}^2 a$, oder

$\overset{x=du}{F(x)} = \overset{x=o}{F(x)} + (\text{tang}(u+du) - \text{tang}\,u)\, \overset{x=o}{F'(x)} . \text{Cos}^2 . u$, oder

$\overset{x=du}{F(x)} = \overset{x=o}{F(x)} + \overset{x=o}{F'(x)} . \text{Cos}^2 u . d\,\text{tang}\,u$,

daher ist: $d\,\text{tang}\,u = \dfrac{\overset{x=du}{F(x)} - \overset{x=o}{F(x)}}{\overset{x=o}{F'(x)} . \text{Cos}^2 u}$.

Setzt man $F(x) = x$, so erhält man: $d\,\text{tang}\,u = \dfrac{du - o}{1 . \text{Cos}^2 u} = \dfrac{du}{\text{Cos}^2 u}$, wie dieß bekanntlich auch so ist.

Setzt man $F(x) = \text{tang}\,x$, so erhält man: $d\,\text{tang}\,u = \dfrac{\text{tang}\,du - \text{tang}\,o}{\dfrac{1}{\text{Cos}^2 o} . \text{Cos}^2 u} = \dfrac{du}{\text{Cos}^2 u}$, wie vorhin.

Setzt man $F(x) = \mathrm{Sin}\,x$, so erhält man: $d\,\mathrm{tang}\,x = \frac{\mathrm{Sin}\,du - \mathrm{Sin}\,o}{\mathrm{Cos}\,o \,.\, \mathrm{Cos}^2 u} = \frac{du}{\mathrm{Cos}^2 u}$, wie vorhin.

Setzt man $F(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \ldots\ldots$, so erhält man:

$$d\,\mathrm{tang}\,u = \frac{1 + du + \frac{du^2}{2} + \ldots\ldots - 1}{e^o \,.\, \mathrm{Cos}^2 u} = \frac{du}{\mathrm{Cos}^2 u},$$ wie zuvor, u. s. w.

Für Reihenkonvergenz ist nicht hinreichend, daß u_∞ unendlich klein sey.

Konvergirend nennt man eine Reihe noch nicht, wenn blos deren Glieder

$$u_o\, u_1\, u_2\, u_3\, u_4 \ldots\ldots\ldots u_n\, u_{n+1} \ldots\ldots$$

bei wachsendem Zeiger n so abnehmen, daß für $n = \infty$ die über n hinauslaufenden Glieder unendlich klein werden, obgleich Letzteres für Konvergenz eine conditio sine qua non ist; es wird vielmehr zur Konvergenz überdieß noch erfordert, daß die Summe unendlich vieler Glieder S_∞, von u_o an bis u_∞ hin, einer endlichen Zahl gleich komme.

Daß Letzteres nicht allemal statt finde, wenn auch die Glieder u_∞ unendlich klein sind, dieß wird u. a. auf eine sehr scharfsinnige Weise an der sogenannten natürlichen harmonischen Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\ldots\ldots$ dargethan.

An dieser sind doch sicherlich die Glieder über u_∞ hinaus, d. h. über $\frac{1}{\infty}$ hinaus, unendlich klein, und dennoch ist S_∞ unendlich groß, welches Letztere sich daraus erweisen läßt, daß man darthut, es könne die Ueberschuß-Summe $S_\infty - S_n$ für keinen auch noch so großen Werth von n jemals unendlich klein werden. Daß aber in der That Letzteres nie eintreten könne, dieß folgt hieraus: $S_\infty - S_n$ oder $S_{\infty - n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots$ $\ldots\ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$ u. s. w. ins Unendliche fortgesetzt. Sey also n auch noch so groß, so ist allemal noch $S_{\infty - n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$, welches um so mehr eintritt, wenn man die Nenner $n+1$ dann $n+2$ dann $n+3$ dann u. s. w. bis auf $2n$ hin durchaus mit den größern Nennern $2n$ dann $2n$ dann $2n$ dann u. s. w. umtauscht. Es ist also

$$S_{\infty - n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n},\ \text{oder}\ S_{\infty - n} > n \,.\, \frac{1}{2n},\ \text{oder}\ S_{\infty - n} > \frac{1}{2}.$$

Reihenkonvergenz durch Zeichenwechsel begünstigt.

Wer mit der Natur der unendlichen Reihen näher bekannt ist, weiß, daß die Summe ihrer *unendlich* vielen Glieder S_∞ *endlich* sey, wenn die Glieder so abnehmen, daß in der Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u^n, \ldots\ldots$ die Glieder u_∞ unendlich klein werden, und daß zugleich ein regelmäßiger Wechsel der den Gliedern vorgesetzten Zeichen statt findet.

Der Beweis hiezu läßt sich z. B. an der Reihe von folgendem Zeichenwechsel geben:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \ldots\ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \ldots\ldots\ldots$$

Es läßt sich hier nämlich erweisen, daß die Ueberschußsumme $S_\infty - S_n$ oder $S_{\infty - n}$, daß nämlich die Summe vom u_0 an bis zum u_∞ hin weniger der Summe vom u_0 an bis zum u_n hin, *verschwinde*, wenn $n = \infty$ werde, daß also die Summe der *unendlich* vielen Glieder, von u_0 an bis u_∞ hin, einer *endlichen* Größe gleich sey *). Daß nun aber die Ueberschußsumme $S_{\infty - n}$ wirklich zu Null werde für $n = \infty$, dieß ergibt sich hieraus:

Diese, vom Gliede u_{n+1} an zu zählende Ueberschußsumme ließe sich auf mehrfache Art ansetzen, u. a. auch auf dergleichen folgende zweifache:

$$S_{\infty - n} = \pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots\ldots\ldots]$$

und $S_{\infty - n} = \mp [u_{n+1} - u_{n+2} + (u_{n+3} - u_{n+4}) + (u_{n+5} - u_{n+6}) + \ldots\ldots\ldots]$.

Der Voraussetzung gemäß nehmen die Glieder $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, u_{n+4}, \ldots\ldots\ldots$ mit dem Fortrücken in der Reihe beständig ab, daher alle durch Klammern begrenzten Differenzen, in obigen zwei Gleichungen, *positiv* sind. Es lassen sich daher jene Gleichungen so ausdrücken: $S_{\infty - n} = \mp [u_{n+1} - \alpha]$ und $S_{\infty - n} = \mp [u_{n+1} - u_{n+2} + \beta]$; daher fällt die Zahl $S_{\infty - n}$ (das Zeichen + oder — hier nicht berücksichtigt) zwischen die zwei Zahlen $u_{n+1} - \alpha$ und $u_{n+1} - u_{n+2} + \beta$, oder, bei Auseinanderrückung der Grenzen, zwischen die zwei Zahlen u_{n+1} und $u_{n+1} - u_{n+2}$ **). Werden daher u_{n+1} und u_{n+2} bei $n = \infty$ zu unendlich kleinen Größen, so wird, für $n = \infty$, die Zahl $S_{\infty - n}$ zu einer zwischen 0 und 0 — 0, d. h. zu einer zwischen 0 und 0 liegenden Zahl, daher selber zu Null.

---

*) *Anmerk.* Wer an der Richtigkeit des in den letztern Worten ausgedrückten *Schlusses* zweifeln möchte, erwäge Folgendes: wenn S_∞, unabgesehen auf den *speziellen* Werth des mit ∞ Bezeichneten, nicht einer *bestimmt* ausgedrückten Größe, also einer *konstanten endlichen* Größe gleich käme, sondern einer unendlich großen daher nicht festbestimmten Zahl, so wäre z. B. $S_{\frac{\infty}{2}}$ anders als $S_{\frac{3\infty}{4}}$ anders als $S_{\frac{5\infty}{8}}$ u. s. w.; also würde sich $S_\infty - S_n$ nicht nothwendig in *jedem* Falle aufheben müssen, wo n irgend einen unendlich großen Werth erhielte, gleichgültig ob $\frac{1}{5}\infty$ oder $\frac{1}{5}\infty$ oder u. s. w.

**) *Anmerk.* Was z. B. zwischen 8 — 5 und 8 — 6 + 3, d. h. zwischen 3 und 5, fällt, wie z. B. 4; dasselbe fällt auch zwischen 8 und 8 — 6, d. h. zwischen 8 und 2.

Die rückgeleiteten Funktionen, eine neue Ansicht im Gebiete der höhern Analysis.

Ich habe schon in einer frühern Schrift *) Betrachtungen angestellt, auf die sich die folgenden beziehen.

Wenn man eine Funktion $\varphi(x)$ differenzirt, und das erhaltene Resultat $\varphi'(x)\,dx$ durch das konstante Differenzial dx dividirt, so erhält man die 1te abgeleitete Funktion $\varphi'(x)$; wenn man die 1te abgeleitete Funktion eben so behandelt, so erhält man die 2te abgeleitete Funktion $\frac{(\varphi(x))'dx}{dx}=\varphi''(x)$, u. s. w. (De la Grange Théorie des fonctions analytiques).

Wir kehren nun die Sache um, und sagen: wenn man eine Funktion $\varphi(x)$ mit dx multiplizirt, und das Produkt integrirt, so erhält man die 1te rückgeleitete Funktion von $\varphi(x)$, die wir durch $'\varphi(x)$ bezeichnen, nämlich $\int\varphi(x)dx='\varphi(x)$. Verfährt man auf dieselbe Weise mit $'\varphi(x)$ als mit $\varphi(x)$ operirt ward, so erhält man die 2te rückgeleitete Funktion von $\varphi(x)$, nämlich $\int{}'\varphi(x)dx=''\varphi(x)=\int(\int\varphi(x)dx)dx$. In eben dem Sinne ist, mit Beziehung auf die 3te 4te 5te u. s. w. rückgeleitete Funktion von $\varphi(x)$, $'''\varphi(x)=\int''\varphi(x)dx$, $''''\varphi(x)=\int'''\varphi(x)dx$, $'''''\varphi(x)=\int''''\varphi(x)dx$, u. s. w.

Taylor's Formel, nach Delagrange's Bezeichnungsweise ausgedrückt, lautet folgendermaßen: $F(x+\omega)=F(x)+\omega.F'(x)+\frac{\omega^2}{2}.F''(x)+\frac{\omega^3}{2.3}.F'''(x)+\ldots\ldots$

Setzen wir $F'(x)=\varphi(x)$, so ist $F''(x)=\varphi'(x)$, $F'''(x)=\varphi''(x)$, u. s. w., hingegen $F(x)='\varphi(x)$, und $F(x+\omega)='\varphi(x+\omega)$, welches wir lieber so bezeichnen $F(x+\omega)=\underbrace{'\varphi(x)}_{x=x+\omega}$.

Setzen wir $F''(x)=\psi(x)$, so ist $F'''(x)=\psi'(x)$, $F''''(x)=\psi''(x)$, $F'''''(x)=\psi'''(x)$, u. s. w., hingegen $F'(x)='\psi(x)$, $F(x)=''\psi(x)$, und $F(x+\omega)=\underbrace{''\psi(x)}_{x=x+\omega}$.

Setzen wir $F'''(x)=X(x)$, so ist u. s. w.

Wir dürfen daher sagen: $\underbrace{'\varphi(x)}_{x=x+\omega}='\varphi(x)+\omega.\varphi(x)+\frac{\omega^2}{2}.\varphi'(x)+\frac{\omega^3}{2.3}.\varphi''(x)+\ldots\ldots$

oder $\underbrace{''\psi(x)}_{x=x+\omega}=''\psi(x)+\omega.'\psi(x)+\frac{\omega^2}{2}.\psi(x)+\frac{\omega^3}{2.3}.\psi'(x)+\ldots\ldots$ oder u. s. w.

---

*) Anmerk. Buquoy eine neue Methode .... dérivation inverse,.....

$$\overbrace{x=x+\omega}$$

Hieraus ergibt sich aber: $\varphi(x) = \frac{'\varphi(x) - '\varphi(x)}{\omega} - \omega . \frac{\varphi'(x)}{2} - \omega^2 . \frac{\varphi''(x)}{2.3}$ ....

$$\overbrace{x=x+\omega}$$

oder $\psi(x) = 2\left(\frac{''\psi(x) - ''\psi(x) - \omega . '\psi(x)}{\omega^2}\right) - \omega . \frac{\psi'(x)}{3} - \omega^2 . \frac{\psi''(x)}{3.4}$ ...... oder u. s. w.

Hier kann die vorletzte Gleichung auch so ausgedrückt werden: $\varphi(x) = \frac{\Delta '\varphi(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} . \varphi'(x) - \frac{\Delta x^2}{2.3} . \varphi''(x) - \ldots\ldots$ worin $'\varphi(x) = \int \varphi(x) dx$, hingegen $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ ausdrückt, u. s. w.

Einige Anwendungen mögen Obiges erläutern, wobei allemal ω klein genug angenommen wird, daß die Glieder mit höhern Potenzen von ω näherungsweise wegbleiben dürfen: $x^m = \frac{(x+\omega)^{m+1} - x^{m+1}}{(m+1)\omega} - \frac{\omega}{2} . m x^{m-1} =$ [nach Neutons Binomialformel entwickelt] $= x^m - \frac{\omega}{2} . m x^{m-1}$, wobei ω immer klein genug angenommen werden kann, daß $\frac{\omega}{2} . m x^{m-1}$ hinwegbleiben darf.

$\mathrm{Sin}\, x = \frac{-\Delta \mathrm{Cos}\, x}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} . \mathrm{Cos}\, x = - \frac{(-\Delta x . \mathrm{Sin}\, x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} . \mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sin}\, x - \frac{\Delta x}{2} . \mathrm{Cos}\, x$, welches letztere näherungsweise $= \mathrm{Sin}\, x$ ist, wenn nach der Voraussetzung Δx sehr klein ist.

Führen diese Betrachtungen auch auf keine neuen Resultate, so erweitern sie dennoch die Theorie des Derivationskalkuls.

Nicht als Folge der Formeln, sondern blos aus dem Begriffe der rückgeleiteten Funktionen, läßt sich für analytische Dynamik Folgendes festsetzen:

Es seyen s v p t die zusammengehörigen Werthe von Raum Endesgeschwindigkeit bewegender Kraft und Zeit an einer, nach irgend einem Gesetze der Continuität, bewegten Masse m, es sey ferner Alles als Funktion der Zeit ausgedrückt, nämlich: $s = f(t)$, $v = F(t)$, $p = \varphi(t)$, so ist $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$, ferner $\frac{2g}{m} . \varphi(t) = \frac{dds}{dt^2} = f''(t)$, ferner $\frac{2g}{m} . dp = \frac{d^3 s}{dt^2}$ oder $\frac{2g}{m} . \varphi'(t) = f'''(t)$, ferner $\frac{2g}{m} . \varphi''(t) = f''''(t)$, u. s. w. Man kann aber auch umgekehrt sagen: $\varphi''(t) = \frac{m}{2g} . f''''(t)$, $\varphi'(t) = \frac{m}{2g} . f'''(t)$, $\varphi(t) = \frac{m}{2g} . f''(t)$, und also nach demselben

Gesetze weiter fortgefahren: $'\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot f'(t) = \frac{m}{2g} \cdot v$, $''\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot f(t) = \frac{m}{2g} \cdot s$, $'''\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot 'f(t)$, $''''\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot ''f(t)$, oder allgemein, es ist die n^{te} rückgeleitete Funktion der bewegenden Kraft gleich der Masse getheilt durch die doppelte Beschleunigung und multiplizirt mit der $(n-2)^{tem}$ rückgeleiteten Funktion des Raumes. Daß in jeder der obigen Gleichungen noch die entsprechende Konstante beizusetzen komme, versteht sich von selbst.

Aus der oben gefundenen Gleichung $'\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot v = \frac{m}{2g} \cdot F(t)$ folgt: $''\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot 'F(t)$, $'''\varphi(t) = \frac{m}{2g} \cdot ''F(t)$, u. s. w., oder allgemein, es ist die n^{te} rückgeleitete Funktion der bewegenden Kraft gleich der Masse getheilt durch die doppelte Beschleunigung und multiplizirt mit der $(n-1)^{tem}$ rückgeleiteten Funktion der Endesgeschwindigkeit.

Eine Anwendung der auf umgekehrter Ableitung der Funktionen beruhenden allgemeinen Integrationsmethode.

Ich habe diese Methode, ihrem Wesen und Geiste nach, schon in einer frühern Schrift vorgetragen *); hier soll blos eine Anwendung davon gemacht werden.

Es sey $\frac{dx}{x}$ zu integriren.

Man bestimme allgemein $\int \frac{dx}{x^m}$ so: $F'(x) = \frac{1}{x^m}$, $F''(x) = -\frac{m}{x^{m+1}}$, $F'''(x) = \frac{m(m+1)}{x^{m+2}}$, $F''''(x) = \frac{-m(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$, u. s. w. Umgekehrt derivirt man: aus $F''''(x)$ das $F'''(x)$ aus $F'''(x)$ das $F''(x)$, aus $F''(x)$ das $F'(x)$, aus $F'(x)$ das $F(x) = \int \frac{dx}{x^m}$, folgendermaßen: das Zeichen + oder — befolgt folgende Ordnung — + — + — also ist $F(x) = C - \varphi(x)$. Ferner: der Zähler enthält durchaus kein x, sondern nur der Nenner, und so besteht in dieser Hinsicht folgende Aufeinanderfolge: x^{m+3}, x^{m+2}, x^{m+3-1}, $x^{m+1} = x^{m+2-1}$, $x^m = x^{m+1-1}$ also endlich x^{m-1}. Daher ist $F(x) = C - \frac{A}{m-1}$. Endlich: der Zähler befolgt folgendes Gesetz der umgekehrten Ableitung: $m(m+1)(m+2)$, $m(m+1) =$

---

*) Anmerkung. Eine neue Methode für den Infinitesimalkalkul,

$= \frac{m(m+1)(m+2)}{m+2-0}$, $m = \frac{m(m+1)}{m+2-1}$, $1 = \frac{m}{m+2-2}$, also endlich $\frac{1}{m+2-3} = \frac{1}{m-1}$.
Wir haben also $F(x) = C - \frac{1}{(m-1)x^{m-1}}$, oder $\int \frac{dx}{x^m} = C - \frac{1}{(m-1)x^{m-1}}$.

Dieß kann aber auch so angesetzt werden, indem man $m = 1 + \omega$ setzt: $\int \frac{dx}{x^{1+\omega}} = C - \frac{1}{\omega x^\omega}$, welches wahr bleibt, auch für sehr kleine Werthe von ω, in welchem letztern Falle $\int \frac{dx}{x^{1+\omega}}$ näherungsweise für $\int \frac{dx}{x}$ genommen werden darf. Approximative, und zwar um so mehr sich der Wahrheit nähernd je kleiner ω ist, darf man also setzen:
$\int \frac{dx}{x} = C - \frac{1}{\omega . x^\omega}$, oder log. nat. $x = C - \frac{1}{\omega . x^\omega} = 1 + \frac{1}{\omega (2,718281828 4)^\omega} - \frac{1}{\omega . x^\omega}$.

Aus Taylor's Formel entwickelte neue Reihen.

Bekanntlich folgt aus Taylor's Formel die allgemeine Methode, irgend eine Funktion von z durch eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von z auszudrücken; es ist nämlich:

$$F(z) = \underbrace{F(z)}_{z=0} + z.\underbrace{F'(z)}_{z=0} + \frac{z^2}{2}.\underbrace{F''(z)}_{z=0} + \frac{z^3}{2.3}.\underbrace{F'''(z)}_{z=0} + \ldots\ldots$$

Hieraus lassen sich nun sehr vielerlei gleichbedeutende Reihen entwickeln, d. h. es läßt sich hieraus F(z) auf sehr mannigfache Weise ausdrücken. Das Prinzip solcher Entwicklung vielfacher Reihen von gleicher Bedeutung besteht in Folgendem:

Man setze $z = \varphi(y)$ woraus $y = \psi(z)$ folgen mag, so folgt: $F(z) = F(\varphi(\varphi)) =$

$$f(y) = \underbrace{f(y)}_{y=0} + y.\underbrace{f'(y)}_{y=0} + \frac{y^2}{2}.\underbrace{f''(y)}_{y=0} + \frac{y^3}{2.3}.\underbrace{f'''(y)}_{y=0} + \ldots\ldots = \underbrace{f(y)}_{y=0} + (\psi(z)).\underbrace{f'(y)}_{y=0} +$$

$$+ \frac{(\psi(z))^2}{2}.\underbrace{f''(y)}_{y=0} + \frac{(\psi(z))^3}{2.3}.\underbrace{f'''(y)}_{y=0} + \frac{(\psi(z))^4}{2.3.4}.\underbrace{f''''(y)}_{y=0} + \ldots\ldots$$

Hier zeigt sich das höchst merkwürdige Gesetz: **eine gegebene Funktion von z läßt sich allemal ausdrücken, durch eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von einer beliebigen Funktion derselben Variabeln z.**

Einige Beispiele mögen jenen Satz erläutern:

Man setze $z = \varphi(y) = a + y$, also $y = \psi(z) = z - a$, und $f(y) = F(a + y)$, so ist:

$$a)\quad F(z)=\underbrace{f(y)}_{y=0}+(z-a)\underbrace{f'(y)}_{y=0}+\frac{(z-a)^2}{2}.\underbrace{f''(y)}_{y=0}+\frac{(z-a)^3}{2.3}.\underbrace{f'''(y)}_{y=0}+\ldots\ldots$$

Man setze $z=\varphi(y)=\frac{1}{a+y}$, also $y=\psi(z)=\frac{1-az}{z}$, und $f(y)=F\left(\frac{1}{a+y}\right)$, so ist:

$$b)\quad F(z)=\underbrace{f(y)}_{y=0}+\left(\frac{1-az}{z}\right).\underbrace{f'(y)}_{y=0}+\left(\frac{1-az}{z}\right)^2.\frac{\underbrace{f''(y)}_{y=0}}{2}+\left(\frac{1-az}{z}\right)^3.\frac{\underbrace{f'''(y)}_{y=0}}{2.3}+\ldots\ldots\text{*)}.$$

Man setze $z=\varphi(y)=(a+y)^m$, also $y=\psi(z)=z^{\frac{1}{m}}-a$, und $f(y)=F((a+y)^m)$, so ist:

$$c)\quad F(z)=\underbrace{f(y)}_{y=0}+(z^{\frac{1}{m}}-a)\underbrace{f'(y)}_{y=0}+(z^{\frac{1}{m}}-a)^2\frac{\underbrace{f''(y)}_{y=0}}{2}+(z^{\frac{1}{m}}-a)^3\frac{\underbrace{f'''(y)}_{y=0}}{2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

Man setze $z=\varphi(y)=b^{a+y}$ also $y=\psi(z)=\frac{\text{log. nat.}\left(\frac{z}{b^a}\right)}{\text{log. nat. b}}$, und $f(y)=F(b^{a+y})$, so ist:

$$d)\quad F(z)=\underbrace{f(y)}_{y=0}+\left(\frac{\text{log. nat.}\left(\frac{z}{b^a}\right)}{\text{log. nat. b}}\right)\underbrace{f'(y)}_{y=0}+\left(\frac{\text{log. nat.}\left(\frac{z}{b^a}\right)}{\text{log. nat. b}}\right)^2\frac{\underbrace{f''(y)}_{y=0}}{2}+$$

$$+\left(\frac{\text{log. nat.}\left(\frac{z}{b^a}\right)}{\text{log. nat. b}}\right)^3\frac{\underbrace{f'''(y)}_{y=0}}{2.3}+\left(\frac{\text{log. nat.}\left(\frac{z}{b^a}\right)}{\text{log. nat. b}}\right)^4\frac{\underbrace{f''''(y)}_{y=0}}{2.3.4}+\ldots\ldots$$

Man setze $z=\varphi(y)=\text{log. nat.}(a+y)$, also $y=\psi(z)=e^z-a$ [e die Basis der natürlichen Logarithmen], und $f(y)=F(\text{log. nat.}(a+y))$, so ist:

$$e)\quad F(z)=\underbrace{f(y)}_{y=0}+(e^z-a)\underbrace{f'(y)}_{y=0}+(e^z-a)^2\frac{\underbrace{f''(y)}_{y=0}}{2}+(e^z-a)^3\frac{\underbrace{f'''(y)}_{y=0}}{2.3}+\ldots\ldots$$

Man setze $z=\varphi(y)=\text{Sin}(a+y)$, also $y=\psi(z)=\text{Arc. Sin. } z-a$, und $f(y)=F(\text{Sin}(a+y))$, so ist:

---

*) Anmerkung. Hieraus läßt sich z. B. Folgendes herleiten. Sey $F(z)=\text{log. nat. } z$, so folgt:
$\text{log. nat. } z=-\text{log. nat. a}-\frac{1}{a}.\left(\frac{1-az}{z}\right)+\frac{1}{2a^2}.\left(\frac{1-az}{z}\right)^2-\frac{1}{3a^3}.\left(\frac{1-az}{z}\right)^3+\ldots\ldots$

f) $F(z) = \overbrace{f(y)}^{y=0} + (\text{Arc.Sin}\, z - a)\overbrace{f'(y)}^{y=0} + (\text{Arc.Sin.}\, z - a)^2 \overbrace{\frac{f''(y)}{2}}^{y=0} + (\text{Arc.Sin}\, z - a)^3 \overbrace{\frac{f'''(y)}{2.3}}^{y=0} +$
$+ \ldots\ldots$

Man setze $z = \varphi(y) = \text{tang}(a+y)$, also $y = \psi(z) = \text{Arc. tang.}\, z - a$, und $f(y) = F(\text{tang}(a+y))$, so ist:

g) $F(z) = \overbrace{f(y)}^{y=0} + (\text{Arc. tang.}\, z - a)\, \overbrace{f'(y)}^{y=0} + (\text{Arc. tang.}\, z - a)^2 \overbrace{\frac{f''(y)}{2}}^{y=0} +$
$+ (\text{Arc. tang.}\, z - a)^3 \overbrace{\frac{f'''(y)}{2.3}}^{y=0} + \ldots\ldots$

Man setze $z = \varphi(y) = \text{Arc. Sin.}(a+y)$, also $y = \psi(z) = \text{Sin}\, z - a$, und $f(y) = F(\text{Arc. Sin}(a+y))$, so ist:

h) $F(z) = \overbrace{f(y)}^{y=0} + (\text{Sin}\, z - a)\, \overbrace{f'(y)}^{y=0} + (\text{Sin}\, z - a)^2 \overbrace{\frac{f''(y)}{2}}^{y=0} + (\text{Sin}\, z - a)^3 \overbrace{\frac{f'''(y)}{2.3}}^{y=0} + \ldots\ldots$

Man setze $z = \varphi(y) = \text{Arc. tang.}(a+y)$, also $y = \psi(z) = \text{tang}\, z - a$, und $f(y) = F(\text{Arc tang}(a+y))$, so ist:

i) $F(z) = \overbrace{f(y)}^{y=0} + (\text{tang}\, z - a)\, \overbrace{f'(y)}^{y=0} + (\text{tang}\, z - a)^2 \overbrace{\frac{f''(y)}{2}}^{y=0} + (\text{tang}\, z - a)^3 \overbrace{\frac{f'''(y)}{2.3}}^{y=0} + \ldots\ldots$

u. s. w.

Jede der hier angesetzten Reihen wird bei einem einmal festgesetzten Werthe von a, genugsam konvergiren, um $F(z)$ näherungsweise durch wenige Anfangsglieder ausdrücken zu dürfen, wenn man für z solche Werthe nimmt, daß $\psi(z)$ genugsam klein für jenen Zweck ausfällt. Daß aber dies möglich sey, folgt hieraus: setzen wir $\psi(z) = u$, so ist der allgemeine Ausdruck für $F(z)$, Alles auf Obiges bezogen, folgender: $F(z) = A + B.u + C.u^2 + D.u^3 + E.u^4 + \ldots\ldots$, worin A B C D E ... konstante Koeffizienten sind; Euler hat aber in seiner Analysis des Unendlichen erwiesen, daß allemal ein endlicher Werth für u möglich sey, welcher klein genug ist, daß, wenn er, oder jeder kleinere Werth statt u in die Reihe substituirt wird, B u größer als die Summe aller unendlich vielen nachfolgenden Glieder werde, u. s. w.

Methoden zu integriren.

A. Integration aller Differenzialformeln in welchen nur eine einzige veränderliche Größe vorkömmt, und in welchen nur die ersten Differenzialien und ihre ersten Potenzen vorkommen.

1. Integrationsmethode für alle rationale und ganze Funktionen.

Weil $\int m x^{m-1} dx = x^m + C$, so wird auch $\int a x^n dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{a x^{n+1}.dx}{(n+1)dx} + C$, wo a eine beliebige beständige und n eine beliebige ganze positive Zahl anzeigt; daher $\int(a x^m dx + b x^n dx + c x^p dx + \ldots) = \frac{a x^{m+1}}{m+1} + \frac{b x^{n+1}}{n+1} + \frac{c x^{p+1}}{p+1} + \ldots + C$

Jede rationale ganze Funktion muß, wenn sie integrirt werden soll, auf eine gleichgeltende Anzahl von Monomen gebracht werden, welches geschieht, wenn man die angezeigten Multiplikationen und Potenzerhebungen wirklich verrichtet; sind z. B. q, n, k ganze positive Zahlen, so wird $\int x^q dx (a + b x^n)^k = \int a^k x^q dx + \int \frac{k a^{k-1} b x^{n+q} dx}{2n+q} + \int \frac{k(k-1) a^{k-2} b^2 x dx}{1.2} + \ldots = C + \frac{a^k x^{q+1}}{q+1} + \frac{k a^{k-1} b}{1} \cdot \frac{x^{n+q+1}}{n+q+1} + \ldots\ldots$

Erinnerung. Wenn die zu integrirende Funktion von der Beschaffenheit ist, daß sie außer den Klammern das vollständige Differenzial der Größe innerhalb den Klammern etwa noch mit einem beständigen Koeffizienten verbunden, enthält, so kann man sogleich integriren; z. B. $\int (a + b x^n)^m c x^{n-1} dx = \int (a + b x^n)^m . d(a + b x^n) . \frac{c}{nb} = \frac{(a + b x^n)^{m+1}.c}{(m+1).nb} + C$. — —. Um in solchen Fällen nicht zu fehlen, setze man die Größe innerhalb der Klammern einer andern veränderlichen gleich; z. B. $\int (a + b x^n)^m c x^{n-1} dx (a + b x^n = z) = \int \frac{c z^m dz}{nb} = = \frac{c}{nb} \cdot \frac{z^{m+1}}{m+1} + C = \frac{c(a + b x^n)^{m+1}}{nb(m+1)} + C.$

2. Integrationen aller rationalen gebrochenen Funktionen.

Unter einem rationalen gebrochenen Monome wird hier jede rationale gebrochene Funktion verstanden, die im Nenner nur die Veränderliche mit einem beständigen Koeffizienten

hat als z. B. $\frac{dx}{x^2}$, $\frac{dx}{x^4}$, $\frac{(a+bx+cx^2+\ldots)^n}{fx^m}gdx$, wo n und m ganze positive Zahlen sind; nicht $\frac{dx}{a+bx}$, $\frac{dx}{(a+bx^2)^m}$ u. s. w.

α. Integration aller rationalen gebrochenen Monomen.

Weil auch für den Fall, wo m eine negative ganze Zahl, $\int mx^{m-1}dx = x^m + C$ also auch $\int ax^{-n}dx = \int \frac{adx}{x^n} = \frac{ax^{-n+1}.dx}{(-n+1)dx} + C$, so muß man, um jedes rationale gebrochene Monom zu integriren, dessen Zähler vor allen durch wirkliche Multiplikation und Potenzerhebung auf Monomen bringen, jedes von diesen Monomen durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiren; ist nach dieser Division in irgend einem Gliede die veränderliche Größe im Nenner noch vorhanden, so muß diese mit dem negativen Exponenten in Zähler gebracht werden; wenn dieses geschehen, so wird jedes Glied integrirt.

Hier muß man aber bemerken, daß $\int \frac{adx}{x} = \int ax^{-1}dx$ nicht $= \frac{ax^0}{0} = \infty$ sondern $= a\,\log.\,nat.\,x + C$ ist, weil $d(a\,\log.\,nat.\,x) = \frac{adx}{x}$.

β. Integration aller rationalen gebrochenen Funktionen, die nicht rationale gebrochene Monomen sind.

a. Integration aller rationalen gebrochenen Funktionen die sich durch eine einfache Substitution auf rationale gebrochene Monomen bringen lassen.

Hieher gehören solche rationale gebrochene Funktionen, deren Zähler das Differenzial des Nenners etwa noch mit einem beständigen Koeffizienten enthält, und werden gerade so wie $\frac{adx}{x}$ integriret, weil sie sich auf diese Form bringen lassen, wenn man ihren Nenner einer andern veränderlichen Größe gleich setzt; die Integrale dieser Funktionen sind demnach immer natürliche Logarithmen.

b. Integration aller rationalen gebrochenen Funktionen, die sich durch eine einfache Substitution nicht auf rationale gebrochene Monomen bringen lassen oder deren Zähler nicht das Differenzial des Nenners enthält.

Um diese Funktionen zu integriren, muß man sie zuerst auf ächte gebrochene Funktionen durch Division bringen; die ganze Funktion, die man so erhält, wird wie bekannt integriret, die gebrochene aber muß vorher in Partialbrüche zerlegt werden, und sodann wird jeder Partialbruch für sich integrirt. Es muß also itzt gezeigt werden wie man alle Partialbrüche integriret. Die Partialbrüche können von folgenden Formen seyn, *a.* $\frac{Adx}{x}$; *b.* $\frac{Adx}{x^n}$; *c.* $\frac{Adx}{p+x}$; *d.* $\frac{Adx}{(p+x)^n}$; *e.* $\frac{(A+Bx)dx}{p+qx+x^2}$; und *f.* $\frac{(A+Bx)dx}{(p+qx+x^2)^n}$, wo A, B, p, q beständige Größen und n eine ganze positive Zahl ist.

a.
b. } werden nach a integriret.

c.
d. } wie a.

Anmerkung. Das Integral aller rationalen gebrochenen Funktionen von der Form $\frac{c x^m dx}{(a+bx)^n} = = \frac{\frac{c}{b} n x^m dx}{(\frac{a}{b}+x)^n} = \frac{A x^m dx}{(p+x)^n}$, findet man sogleich, ohne die Zerlegung in Partialbrüche vorzunehmen, wenn man $p+x=z$ setzt, $x^m=(z-p)^m$ entwickelt, und so die Funktion auf rationale gebrochene Monomen bringt (α).

Dasselbe gilt auch von der rationalen gebrochenen Funktion von der Form $\frac{(A+Bx+Cx^2+\ldots)^m dx}{(a+bx)^n}$.

e. Um diesen Bruch zu integriren, schaffe man aus dem Nenner das 2te Glied qx durch die Substitution $x+\frac{q}{2}=z$ hinweg, so erhält man einen Bruch von der Form $\frac{(Bz+D)dz}{z^2+m^2}$ oder die 2 Brüche $\frac{Bzdz}{z^2+m^2}+\frac{Ddz}{z^2+m^2}$, der erste wird ..... nach (α) integriret, der zweite wie folget: man setze $z=mu$, so wird $\frac{Ddz}{z^2+m^2}=\frac{D}{m}\cdot\frac{du}{u^2+1}$ also $\int\frac{Ddz}{z^2+m^2}= =\frac{D}{m}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{D}{m}\text{Arcus tang}\frac{z}{m}+C$ (Formel 12) u. s. w.

f. Um das Integral dieses Bruches zu finden, setze man wie vorher $x+\frac{q}{2}=z$, und man wird einen Bruch von der Form $\frac{(Bz+D)dz}{(z^2+m^2)^n}$ oder die beiden Brüche $\frac{Bzdz}{(z^2+m^2)^n}+ +\frac{Ddz}{(z^2+m^2)^n}$ erhalten. Der erste wird integriret, wenn man $z^2+m^2=u^2$ setzt, und sodann nach (α) integriret; der zweite aber wie folget: man setze $\int\frac{dz}{(z^2+m^2)^n}=\frac{Gz}{(z^2+m^2)^{n-1}}+ +H\int\frac{dz}{(z^2+m^2)^{n-1}}$ wo G und H zwei beständige unbestimmte Koeffizienten sind, differenzire und suche aus der identischen Gleichung die Werthe von G und H, man wird finden $G=\frac{1}{(2n-2)m^2}$, $H=\frac{(2n-3)}{(2n-2)m^2}$, also $\int\frac{dz}{(z^2+m^2)^n}=\frac{1}{(2n-2)m^2}\cdot\frac{z}{(z^2+m^2)^{n-1}} +\frac{(2n-3)}{(2n-2)m^2}\int\frac{dz}{(z^2+m^2)^{n-1}}$; auf dieselbe Art muß man mit dem Integral $\int\frac{dz}{(z^2+m^2)^{n-1}}$ verfahren, wozu die gefundene letzte Gleichung dient, wenn man in ihr statt n, $n-1$ setzt, und diese Operation so lange fortsetzen, bis der Exponent n auf die Einheit vermindert ist,

man wird nämlich haben: $\int \frac{dz}{(z^2+m^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)m^2} \cdot \frac{z}{(z^2+m^2)^{n-1}} + \frac{1.(2n-3)}{(2n-2)(2n-2)m^4} \cdot$
$\cdot \frac{z}{(z^2+m^2)^{n-2}} + \frac{1.(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)m^6} \cdot \frac{z}{(z^2+m^2)^{n-3}} + \ldots$ und diese Reihe wird sich endigen mit dem Gliede $\int \frac{dz}{(z^2+m^2)^2} = \frac{1}{m}$ Arcus tang $\frac{z}{m}$. (Siehe Formel 12 und c).

Erinnerungen über die Integration aller rationalen gebrochenen Funktionen.

Außer den vorgetragenen Integrationsmethoden gibt es noch andere. Von der Integration durch unendliche Reihen wird weiter unten im Allgemeinen gesprochen werden. Der Bruch $\frac{(Bx+A)dx}{x^2+qx+p^2}$ kann auch so integriret werden: derselbe läßt sich in 2 andere verwandeln, von welchen der eine zum Zähler das Differenzial des Nenners hat, als $\int \frac{(Bx+A)dx}{x^2+qx+p^2} =$

$$\int \frac{B}{2} \frac{(2xdx+qdx)}{x^2+qx+p^2} + \int \frac{\left(A-q\frac{B}{2}\right)dx}{x^2+qx+p^2} = B \log \sqrt{(x^2+qx+p^2)} + \frac{1}{2}(2A-qB).$$

$\int \frac{dx}{x^2+qx+p^2}$ und hier ist $\int \frac{dx}{x^2+qx+p^2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{q}{2}\right)^2+p^2-\frac{q^2}{4}} = \frac{2}{\sqrt{(4p-q^2)}} \cdot$

Arcus tg $\left(\frac{2x+q}{\sqrt{(4p-q^2)}}\right)$. Euler gibt für die Integration des Partialbruches $\frac{(Bx+A)dx}{(x^2+qx+p^2)^n}$ eine andere Methode, sie ist aber länger als unsere.

Oft ereignet es sich, daß man, nachdem man auf irgend eine Art das Integral einer Differenzialfunktion gefunden hat, aus der Natur dieses Integrals einsieht, wie man dasselbe leichter und kürzer hätte finden können.

3. Integration der irrationalen Funktionen.

α. Wenn eine Funktion der ersten Potenz von x zu was immer für einer gebrochenen Potenz erhoben ist, als $(a+bx)^{\frac{m}{n}}dx$.

Man setze $(a+bx)^{\frac{m}{n}} = y^m$ so wird $\int (a+bx)^{\frac{m}{n}} dx = \int \frac{y^m n y^{n-1} dy}{b}$ und dieses Integral wird nach der 1ten Formel $\int m x^{m-1} dx = x^m$ integriret.

Dasselbe gilt auch, wenn $X dx (a+bx)^{\frac{m}{n}}$ zu integriren ist, wo X was immer für eine rationale ganze oder gebrochene Funktion ist.

β. Wenn eine Funktion der zweiten Potenz von x zu was immer für einer gebrochenen

Potenz erhoben ist, wo aber der Nenner der Potenz $=2$, als $Xdx(a+bx+cx^2)^{\frac{m}{2}}$, hier ist X was immer für eine rationale ganze oder gebrochene Funktion von x, und m was immer für eine ganze positive oder negative Zahl.

Weil $Xdx(a+bx+cx^2)^{\frac{m}{2}} = X(a+bx+cx^2)^n dx \sqrt{(a+bx+cx^2)}$, so wird sich diese Funktion integriren (vollkommen) lassen, wenn man den Faktor $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ rational machen kann. Dieses geschieht:

Erstens: wenn $a+bx+cx^2$ in zwei reelle Faktoren zerlegt werden kann, nämlich $\sqrt{(a+bx+cx^2)} = \sqrt{(x+f)(x-g)c} = c^{\frac{1}{2}}((x+f)(x-g))^{\frac{1}{2}}$, daß man $((x+f)(x-g))^{\frac{1}{2}} = (x+f)z$ setzt, hieraus findet man $x = \frac{fz^2+g}{1-z}$, $dx =$ u. s. w.

Zweitens: wenn $a+bx+cx^2$ nur in zwei imaginäre Faktoren zerlegt werden kann, (diese Methode ist auch im ersten Falle anwendbar) so setze man $\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = x+z$, woraus man findet $x = \frac{cz^2-a}{b-2cz}$, $dx =$ u. s. w.

γ. Die Differenzialformel $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$, wo $m, n, \frac{\mu}{\nu}$ was immer für Zahlen seyn können, ist in zwei Fällen sogleich und vollkommen integrabel.

Erstens: wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, in diesem Falle setze man $a+bx^n = y$, so wird

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{(y-a)^{\frac{m}{n}-1} y^{\frac{\mu}{\nu}} dy}{nb^{\frac{m}{n}}},$$

und itzt wird $(y-a)^{\frac{m}{n}-1}$ in eine endliche Reihe aufgelöst u. s. w.

Zweitens: wenn $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist, in diesem Fall setze man $a+bx^n = x^n y^\nu$,

so wird $$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{-\nu a^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}} . y^{\nu+\mu-1} dy}{n(y^\nu-b)^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1}}$$ hier hat man eine rationale gebrochene Funktion.

δ. Wenn die Fälle sub littera γ nicht statt finden, so gibt es drei Methoden die Formel $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ auf eine einfachere ihrer Art zurückzuführen.

1te Methode wo bloß der Exponent $\frac{\mu}{\nu}$ so oft als man will um die Einheit vermehrt oder vermindert werden kann. Weil $d\left(x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)=mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}+bn\frac{\mu}{\nu}x^m.(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}x^{n-1}dx$, so wird man, nachdem man das Glied oder die Größe $\frac{n\mu}{\nu}x^{m-1}a(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}dx$ addirt und subtrahirt und die positive Größe mit dem obern letzten Gliede addirt hat, finden:

$$d\left(x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)=\left(m+\frac{n\mu}{\nu}\right)x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}-\frac{an\mu}{\nu}x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$$

also $x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=\left(m+\frac{n\mu}{\nu}\right)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}-\frac{an\mu}{\nu}\int(x^{m-1}dx)(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$ und

hieraus $\int\left(x^{m-}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\right)=-\frac{\nu x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{an\mu}+\frac{m\nu+nm}{an\mu}\int(x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$

Mittelst dieser Formel kann man nun in dem $\int(x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ den Exponenten $\frac{\mu}{\nu}-1$ wieder um die Einheit vermindern. Aus der vorletzten Gleichung hat man auch

$$\int(x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{m+\frac{n\mu}{\nu}}+\frac{\frac{an\mu}{\nu}\int(x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}}{m+\frac{n\mu}{\nu}}$$ und hier kann man in dem letzten Gliede den Exponenten $\frac{M}{\nu}-1$ mittelst derselben Formel so oft als man will vermindern.

2te Methode, wo bloß der Exponent m um n so oft als man will vermehrt oder vermindert werden kann. Da $d\left(x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)=mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}+$

$$+\frac{bn\mu}{\nu}x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}=mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}(a+bx^n)+$$

$$+\frac{bn\mu}{\nu}x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$$, so wird $\int\left(x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\right)=$

$$= \frac{x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{ma} - \frac{\left(m+\frac{n\mu}{\nu}b\right)}{ma}\int\left(x^{m-1+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\right)$$ und aus derselben Gleichung

$$\int x^{m-1+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{\left(m+\frac{n\mu}{\nu}\right)b} - \frac{ma\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{\left(m+\frac{n\mu}{\nu}\right)b}.$$

3te Methode wo der Exponent m um n vermehrt oder vermindert und zugleich der Exponent $\frac{\mu}{\nu}$ um die Einheit vermindert oder vermehrt wird. Es ist $d\left(x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\right) =$

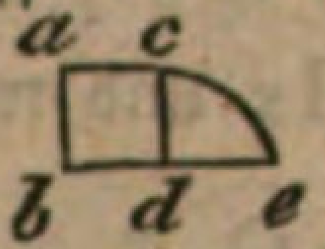
$$= m x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} + \frac{nb\mu}{\nu}x^{m+n-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\,dx,$$ also

$$\int\left(x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\right) = \frac{x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{m} - \frac{bn\mu}{\nu.m}\int x^{m-1+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$$ und auch

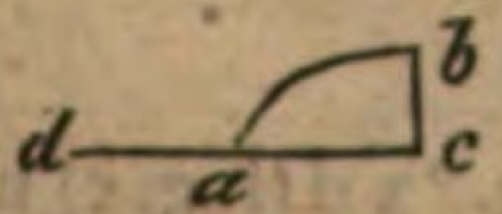
$$\int x^{m-1+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{\nu x^m}{bn\mu}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} - \frac{m\nu}{bn\mu}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Diese Methoden gewähren oft den großen Vortheil, daß man durch sie das zu suchende Integral auf ein anderes bringt, welches bekannt ist, wie z. B. auf die Formeln 10, 11, 15, 16, oder welches durch Auflösung in unendliche Reihen integrirt, eine sehr konvergirende Reihe gibt.

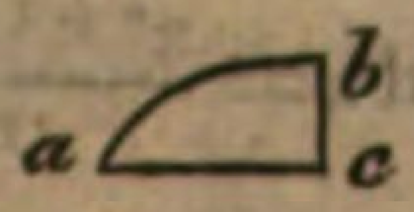
Als Beispiele über die Integration irrationaler Formeln dieser Art, Quadratur der Kegelschnitte.

Wenn 

abe ein Quadrant einer Ellipse, be = a, ba = b, bd = x, so ist die Fläche abcd $= \frac{bx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2a} + \frac{ba}{2}$ Arcus Sin $\frac{x}{a}$ und die Fläche des ganzen Quadranten $= \frac{\pi ab}{4}$.

Wenn 

bac ein Stück von einer Hyperbel, da = a, die konjugirte Axe = b, dc = x, so ist die Fläche abc $= \frac{bx}{2a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{bx}{2}$ log. nat. $\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}\right)$.

Wenn abc 

ein Stück einer Parabel ist, deren Parameter = p, ac = x, cb = y, so ist die Fläche abc $= \frac{2}{3}\frac{y^3}{p} = \frac{2}{3}xy$.

ε. Wenn die vorgelegte irrationale Differenzialfunktion in den drei Fällen α, β, γ nicht enthalten und von einer andern als der in d angegebenen Form ist und auch auf diese Form nicht gebracht werden kann, so kann die vorgelegte Funktion nur näherungsweise integriret werden. Dieses geschieht, daß man den ganzen irrationalen Theil der Funktion oder etwa nur einen seiner Faktoren, je nachdem es nöthig ist, nach der Binomialformel in eine unendliche Reihe auflöst, und auf diese Art die vorgelegte Funktion, auf eine gleichgeltende Summe verschiedener Glieder bringt, die für sich integrabel sind. Integrirt man nun jedes Glied für sich, so erhält man eine Reihe von Integralien, die aber, wenn sie brauchbar seyn soll, konvergirend seyn muß; dieses wird immer seyn, so oft es die Reihe ist, die man durch Auflösung erhalten hat, und so oft in dieser Reihe die Zeichen $+$, $-$ wechseln, weil sich eine jede solche Reihe in eine konvergirende verwandeln läßt.

Diese Methode, das gesuchte Integral durch eine unendliche Reihe auszudrücken, ist auch bei den rationalen gebrochenen, so wie auch bei den transscendenten Funktionen anwendbar.

4. Integration der transscendenten Funktionen.

α. Integration der Funktionen in welchen Logarithmen vorkommen.

Die Formel $\log.^m x \,.\, x^n dx$ kann auf zweierlei Art integrirt werden, m und n sind beliebige Zahlen.

Weil $d(x'y) = y\,dx' + x'\,dy$ also $\int y\,dx' = x'y - \int x'\,dy$, so wird, wenn man $y = \log.^m x$, und $dx' = x^n dx$ setzt $\int \log.^m x \,.\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log.^m x - \frac{m}{n+1} \int \log.^{m-1} . x^n dx$, eben so $\int \log.^{m-1} x \,.\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log.^{m-1} x - \frac{m+1}{n+1} \int \log.^{m-2} x\, x^n dx$ und wenn man so fortfährt $\int \log.^m x \,.\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\log.^m x = \frac{m}{n+1} \log.^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{(n+2)^2} \log.^{m-2} x - \ldots \right)$.

Hier muß man aber bemerken, daß für $n = -1$, $\int \log.^m x \,.\, \frac{dx}{x} = \int \log.^m x\, d(\log. x) = \frac{\log.^{m+1} x}{m+1}$ ist.

Setzt man $\int \log.^m x\, x^n dx = \int \log.^m x \,.\, x^{n+1} \frac{dx}{x} = \int x^{n+1} \log.^m x\, d(\log. x)$ und itzt in der Gleichung $\int y\,dx' = x'y - \int x'\,dy$, $y = x^{n+1}$ und $dx' = \log.^m x\, d \log. x$, so wird $\int \log.^m x \,.\, x^n dx = \frac{x^{n+1} \log.^{m+1} x}{m+1} - \int \frac{\log.^{m+1} x}{m+1} (n+1) x^n dx = \frac{x^{n+1} \log.^{m+1} x}{m+1} - \left(\frac{n+1}{m+1}\right) \int x^{n+1} \log.^{m+1} x\, d \log. x$; fährt man auf diese Art fort, so wird man erhalten

$$\int \log.^m x . x^n dx = \frac{x^{n+1}}{m+1}\left(\log.^{m+1}x - \frac{(n+1)\log.^{m+2}x}{m+2} + \frac{(n+1)^2\log.^{m+3}x}{(m+2)(m+3)} \ldots\ldots\right).$$

Für $m = -1$, ist aber $\int \log.^m x . x^n dx$ nicht $= \infty$, sondern weiter unten werden wir zeigen, welchen Werth das Integral $\int \frac{x^n dx}{\log. x}$ oder wenn $x^{n+1} = z$ gesetzt wird, das Integral $\int \frac{dz}{\log. z}$ habe. Hier hat man also zwei Reihen für den Werth von $\int \log.^m x . x^n dx$ von welchen jene zu nehmen ist, die mehr konvergirt. Wird $m = -1 = n$ so hat man

$$\int \frac{\frac{dx}{x}}{\log. x} = \int \frac{d(\log. x)}{\log. x} = \log. (\log. x).$$

Ist der Logarithme der Veränderlichen auf eine andere als die itzt gezeigte Art in der Funktion verwebt, so kann man nicht anders integriren, als daß man den Logarithmen in eine unendliche Reihe auflöst.

β. Integrationen der Funktionen in welchen Exponentialgrößen vorkommen.

Um $\int^{mx} e dx$ zu finden, so setze $mx = y$ (Formel 3), eben so um $\int e^{p+mx} dx$ zu finden.

Die Funktion $x^{mx} e dx$ kann auf zweierlei Art integrirt werden.

Weil $\int y dx' = x'y - \int x' dy$, so setze einmal $y = x^m$ und $dx' = e^x dx$, so wird $\int x^m e^x dx = x^m e^x - \int e^x m x^{m-1} dx$, fährt man so fort, so erhält man $\int x^m e^x dx =$

$$= e^x x^m \left(1 - \frac{m}{x} + \frac{m(m-1)}{x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^3} + \ldots\right).$$

Setzt man aber $y = e^x, dx' = x^m dx$, so hat man $\int e^x x^m dx = \frac{e^x x^{m+1}}{m+1}\Big(1 - \frac{x}{m+2} +$

$$+ \frac{x^2}{(m+2)(m+3)} - \frac{x^3}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \ldots\ldots\Big).$$

Von diesen beiden Reihen muß die konvergirendere genommen werden. Die letzte gibt $m = -1$ nichts, aus der ersten finden wir aber $\int \frac{e^x dx}{x} = \int \frac{d(e^x)}{x} = \int \frac{d(e^x)}{\log. e^x} = \frac{e^x}{x}\Big(1 + \frac{1}{x} +$ $+ \frac{2}{x^2} + \frac{2.3}{x^3} + \ldots\ldots\Big)$. Hieraus sehen wir, daß der Werth von $\int \frac{dz}{\log. z} = \frac{z}{\log. z}\Big(1 + \frac{1}{\log. z} +$ $+ \frac{2}{\log.^2 z} + \frac{2.3}{\log.^3 z} + \ldots\ldots\Big)$ sey. Es ist aber auch $\int \frac{dx}{x} e^x = \int \frac{dx}{x}\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} +$ $+ \ldots\Big)$ daher $\Big($Soldners Tafeln für Integralien von $\frac{dx}{\log. x}\Big)$ $\int \frac{dx}{x} e^x = \log. x + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} +$ $+ \frac{1}{2.3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{x}{4} + \ldots$ also $\int \frac{dz}{\log. z} = \log. \log. z + \log. z + \frac{\frac{1}{2}\log.^2 z}{2} + \frac{1}{2.3} \frac{\log.^3 z}{3} + \ldots$

Weil endlich $\int \frac{e^x dx}{x} = \int \frac{dz}{\log. z} = \int \frac{dz}{\log.(1+g-1)} = \int \frac{dz}{(z-1)\left(1-\frac{(z-1)}{2}+\frac{(z-1)^2}{3}-..\right)}$

so setze $\frac{1}{(z-1\left(1-\frac{(z-1)}{2}+\frac{(z-1)^2}{3}+......\right)} = A + B(z-1) + C(z-1)^2 + \ldots$ u. s. w.

γ. Integration der Funktionen in welchen Cosinus vorkommen.

Um $\int dx \, Cos^m x$ zu finden, so setze $\int dx \, Cos^m x = \int dx \, Cos\, x \, Cos^{m-1} x$ und in der Formel $\int y\, dx' = x'y - \int x'\, dy$, $y = Cos^{m-1} x$, $dx' = dx \, Cos\, x$ so wird $\int dx \, Cos^m x =$ $= Sin\, x \, Cos^{m-1} x - \int Sin\, x (m-1) Cos^{m-2} x. - dx \, Sin\, x = Sin\, x \, Cos^{m-1} x + (m-1).$ $.\int (dx \, Cos^{m-2} x - dx \, Cos^m x)$ woraus

$\int dx \, Cos^m x = \frac{Sin\, x . Cos^{m-1} x + (m-1) \int dx \, Cos^{m-2} x}{m}$ eben so ist

$\int dx \, Cos^{m-2} x = \frac{Sin\, x \, Cos^{m-3} x + (m-3) \int dx \, Cos^{m-4} x}{m-2}$ u. s. w. Ist m eine positive ganze Zahl, so wird sich diese Reihe endigen entweder mit $\ldots \int dx \, Cos^3 x = \int dx = x$ oder mit $\ldots \int dx \, Cos\, x = Sin\, x$ je nachdem nämlich die Zahl m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Aus der obern Gleichung hat man $\int dx \, Cos^{m-2} x = \frac{-Sin\, x \, Cos^{m-1} x + m \int dx \, Cos^m x}{m-1}$, also wenn man $m-2 = \pm n$ setzt, $\int dx \, Cos^{\pm n} x = \frac{-Sin\, x \, Cos^{\pm n+1} x + (\pm n+1) \int dx \, Cos^{\pm n+2} x}{\pm n+1}$; u. s. w. Ist in $\int dx \, Cos^{-n} x$ das n eine ganze Zahl, so kömmt man endlich entweder auf $\int dx \, Cos^3 x = x$ oder auch $\int \frac{dx}{Cos\, x}$, wie dieses Integral gefunden werde, wird aber weiter unten gezeigt werden. Ist n Bruchzahl, so unendliche Reihe, welche oft genugsam konvergiret.

δ. Integration der Funktionen in welchen Sinuse vorkommen.

Das Integral $\int dx \, Sin^m x$ wird auf dieselbe Art wie $\int dx \, Cos^m x$ gefunden, nämlich $\int dx \, Sin^m x = \int dx \, Sin\, x . Sin^{m-1} x$ u. s. w. bis man erhält $\int dx \, Sin^m x =$ $= \frac{-Sin^{m-1} x \, Cos\, x + (m-1) \int dx \, Sin^{m-2} x}{m}$; auf dieselbe Art verfährt man mit $\int dx \, Sin^{m-2} x$ u. s. w. Ist also m eine ganze positive Zahl, so bringt man das zu suchende Integral auf $\int dx$ oder $\int dx \, Sin\, x$, welche Integralien bekannt sind. Ist aber m eine negative Zahl, so muß man den Exponenten vermehren, welches mittelst derselben Gleichung geschieht: denn aus der letzten Gleichung ist $\int dx \, Sin^{m-2} x = \frac{Sin^{m-1} x \, Cos\, x + m \int dx \, Sin^{-m} x}{m-1}$ daher

$\int dx \, \text{Sin}^{-m-2} x = \frac{\text{Sin}^{-m-1} x \, \text{Cos}\, x}{-m-1} - \frac{m \int dx \, \text{Sin}^{-m} x}{-m-1}$, und wenn man $-m-2=-n$ setzt $\int dx \, \text{Sin}^{-n} x = \frac{\text{Sin}^{-n+1} x \, \text{Cos}\, x - (n-2) \int dx \, \text{Sin}^{-n+2} x}{-n+1}$, auf solche Art kömmt man endlich entweder auf $\int dx = x$ oder auf $\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x}$.

Es kömmt demnach nur noch darauf an zu wissen was $\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x}$ und $\int \frac{dx}{\text{Cos}\, x}$ ist.

Da $\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x} = \int \frac{\frac{dx}{2}}{\text{Sin}\frac{x}{2} \, \text{Cos}\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2}}{\text{tg.}\frac{x}{2} \, \text{Cos}^2\frac{x}{2}}$ so ist $\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x} = \log \text{tg}\, \frac{x}{2}$.

Man setze $x = \frac{\pi}{2} - y$, so wird $\int \frac{dx}{\text{Cos}\, x} = -\int \frac{dy}{\text{Sin}\, y} = \log \text{Cot}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. Das Integral $\int x^n dx \, \text{Sin}^m x$ findet man so: weil $\int y \, dx' = x' y - \int x' dy$, so wird $\int x^n dx \, \text{Sin}^m x = = x^n \int dx \, \text{Sin}^m x - \int (n x^{n-1} dx \int dx \, \text{Sin}^m x)$ nun ist $\int dx \, \text{Sin}^m x$ bekannt, und heiße P, also u. s. w. $\int x^n dx \, \text{Sin}^m x = x^n P - n x^{n-1} Q \ldots\ldots n(n-1)(n-2) \ldots \int dx R$.

Auf dieselbe Art findet man das Integral $\int x^n dx \, \text{Cos}^m x$.

Um das Integral $\int dx \, \text{Sin}^m x \, \text{Cos}^n x$ zu finden, muß man die Exponenten m oder n so lange vermindern oder vermehren, bis man dasselbe auf einen von den folgenden Integralien bringt: $\int \text{Cos}^g x . dx$; $\int \text{Sin}^h x \, dx$; $\int \frac{dx}{\text{Cos}\, x}$; $\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x}$; $\int \frac{\text{Sin}\, x \, dx}{\text{Cos}\, x}$; $\int \frac{\text{Cos}\, x . dx}{\text{Sin}\, x}$; die aus dem Vorhergehenden bekannt sind; es ist nämlich $\int dx \frac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x} = \int dx \, \text{tg}\, x = \text{tg} x . x - \int x \, d(\text{tg}\, x) = x \, \text{tg}\, x - \int x \, dx \, \text{Cos}^{-2} x$, und $\int \frac{dx \, \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x} = x \, \text{Cot}\, x + \int x \, dx \, \text{Sin}^{-2} x$. Dieses geschieht aber mittelst folgender Formeln, weil $d(\text{Sin}^m x \, \text{Cos}^n x) = m \, dx \, \text{Sin}^{m-1} x \, \text{Cos}^{n+1} x - n \, dx \, \text{Sin}^{m+1} x \, \text{Cos}^{n-1} x$, so findet man hieraus

1. $\int dx \, \text{Sin}^{m-1} x \, \text{Cos}^{n+1} x = \frac{\text{Sin}^m x \, \text{Cos}^n x + n \int dx \, \text{Sin}^{m+1} x \, \text{Cos}^{n-1} x}{m}$

2. $\int dx \, \text{Sin}^{m+1} x \, \text{Cos}^{n-1} x = \frac{-\text{Sin}^m x \, \text{Cos}^n x + m \int dx \, \text{Sin}^{m-1} \text{Cos}^{n+1} x}{n}$.

Ferner weil

$$d(\text{Sin}^m x \, \text{Cos}^n x) = m \, dx \, \text{Sin}^{m-1} x \, \text{Cos}^{n-1} x \, \text{Cos}^2 x - n \, dx \, \text{Sin}^{m+1} x \, \text{Cos}^{n-1} x$$
$$= m \, dx \, \text{Sin}^{m-1} x \, \text{Cos}^{n-1} x - (m+n) \, dx \, \text{Sin}^{m+1} x \, \text{Cos}^{n-1} x$$

so ist

3. $\int dx \, \text{Sin}^{m+1} x \, \text{Cos}^{n-1} x = \frac{-\text{Sin}^m x \, \text{Cos}^n x + m \int dx \, \text{Sin}^{m-1} x \, \text{Cos}^{n-1} x}{m+n}$ und

4. $\int dx \operatorname{Sin}^{m-1} x \,.\, \operatorname{Cos}^{n-1} x = \frac{\operatorname{Sin}^m x \operatorname{Cos}^n x + (m+n) \int dx \operatorname{Sin}^{m+1} x \operatorname{Cos}^{n-1} x}{n}$

auf ähnliche Art findet man

5. $\int dx \operatorname{Sin}^{m-1} x \operatorname{Cos}^{n+1} x = \frac{\operatorname{Sin}^m x \operatorname{Cos}^n x + n \int dx \operatorname{Cos}^{n-1} x \operatorname{Sin}^{m-1} x}{m+n}$

6. $\int dx \operatorname{Sin}^{m-1} x \operatorname{Cos}^{n-1} x = \frac{-\operatorname{Sin}^m x \operatorname{Cos}^n x + (m+n) \int dx \operatorname{Sin}^{m-1} x \operatorname{Cos}^{n+1} x}{n}$

Anmerkungen. $\int dx \operatorname{Cos}(a+bx)$ findet man, wenn man $a+bx=y$ setzt. Um $\int dx \operatorname{Cos}(a+bx^2)$ u. s. w. zu finden, muß man die trigonometrische Funktion in eine unendliche Reihe auflösen. $\int x^{n-1} dx . \operatorname{Cos}(a+bx^n)$ erhält man aber sogleich, durch die Substitution $a+bx^n=y$. Die Funktionen, in welchen Tangenten oder Cotangenten vorkommen, müssen in Sinus und Cos aufgelöst werden.

Wenn m eine ganze und positive Zahl anzeigt, so lassen sich die Integrale $\int dx \operatorname{Cos}^m x$ oder $\int X dx \operatorname{Cos}^m x$ oder $\int dx \operatorname{Sin}^m x$ oder $\int X dx \operatorname{Sin}^m x$ (wo X was immer für eine nicht transscendente Funktion von x) auch so finden, daß man für $\operatorname{Cos}^m x$ seinen Werth

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos} m x + \frac{m}{1} \operatorname{Cos}(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} \operatorname{Cos}(m-4)x + \\ \qquad \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \operatorname{Cos}(m-6)x + \ldots \end{array} \right\}$$

und für $\operatorname{Sin}^m x$ seinen Werth

$$\frac{1}{\pm 2^{m-1}} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Sin} m x - \frac{m}{1} \operatorname{Sin}(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} \operatorname{Sin}(m-4)x + \\ \qquad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \operatorname{Sin}(m-6)x + \ldots \end{array} \right\}$$

(wo + zu nehmen ist, wenn $m-1$ ein Vielfaches von 4, — aber wenn $m-1$ ein Vielfaches von 2 ist) setzt.

B. Integration der Differenzialfunktionen, in welchen zwei veränderliche Größen, worin auch höhere Differenzialien und höhere Exponenten der Differenzialien vorkommen, oder Integration der Differenzialgleichungen.

Eine Differenzialgleichung integriren heißt aus der zwischen den Differenzialien dx, dy gegebenen Beziehung, die in demselben Fall zwischen x und y statt findende Relation zu finden. Dieses geschieht indem beide Theile der Gleichung integrirt werden und sodann die Konstante hinzugesetzt wird.

Wenn man in jedem Fall von der Richtigkeit der aus der zwischen dx und dy gegebenen Differenzialgleichung, zwischen x, y gefundenen endlichen Gleichung versichert seyn will, so muß diese Gleichung immer nach den Regeln der Integralrechnung gefunden werden; eine Gleichung, die man durchs Errathen zwischen x und y ansetzt, kann, obwohl sie differenzirt die vorgelegte Gleichung herstellt, dennoch falsch seyn, z. B. $x^2-y^2=0$ differenzirt, gibt $xdx-ydy=0$, wollte man nun $x=y$ setzen, so wäre zwar $xdx-xdx=0$ u. s. w.

Eine und dieselbe endliche Gleichung zwischen x und y, kann, wenn sie differenzirt wird, verschiedene Differenzialgleichungen geben z. B.

$$axy + bx - cy = 0 \qquad axdy + aydx + bdx - cdy = 0$$

oder

$$ax + \frac{bx}{y} - c = 0 \quad \text{differenzirt} \quad adx + \frac{bydx - bxdy}{y^2} = 0$$

oder

$$a + \frac{b}{y} - \frac{c}{x} = 0 \qquad -\frac{bdy}{y^2} + \frac{cdx}{x^2} = 0$$

hieraus folgt, daß man durch die Integration u. s. w., es wird aber immer eine andere Konstante zu bestimmen seyn.

Wenn eine Differenzialgleichung $= 0$ ist, so ist ihr Integral immer $=$ Konstante.

a. Integration der Differenzialgleichungen des ersten Grades, (in welchen nämlich nur die ersten Differenzialien vorkommen) wo blos 1te Potenzen der Differenzialien sind.

Die hieher gehörigen Differenzialgleichungen lassen sich nicht alle integriren, sondern nur die folgenden, bei welchen es nämlich möglich ist, die Veränderlichen von einander zu trennen.

I. Wenn in der Differenzialgleichung die Summe der Exponenten von x und y in allen Gliedern dieselbe ist; in diesem Fall setze man $x = uy$ oder $y = ux$ und substituire, so wird man immer auf eine Gleichung von der Form $Ydy = Udu$ kommen, wo $Y = F(y)$ und $U = F(u)$, und itzt kann jeder Theil für sich integrirt werden u. s. w.

II. Wenn von einer der veränderlichen Größen x, y nur die erste Potenz vorhanden ist, und sich die Gleichung auf die Form $dy + Pydx = Qdx$ bringen läßt, worin P und Q was immer für Funktionen von x sind.

Man multiplizire mit einer unbestimmten Funktion von X das $Xdy + XPydx = XQdx$; der zweite Theil dieser Gleichung ist immer integrabel, X mag seyn was es immer will, im ersten Theile kann man also X so bestimmen, damit $dX = XPdx$ wird, es muß nämlich $\log X = \int Pdx$ seyn, und sodann hat man vermöge Formel 17; $Xy = \int XQdx + C$.

(Hauptanmerkung. Alle Differenzialgleichungen lassen sich ohne eine Ausnahme auf folgende Art näherungsweise integriren, es sey z. B. $dy + ydx = x^2 dx$, so setze man $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ also $dy = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + \ldots$ und substituire, so werden sich aus der identischen Gleichung die Koeffizienten B, C, D u. s. w. durch A und gewisse Zahlen ausdrücken lassen, A wird sodann wie die Konstante bestimmt; hat x einen sehr großen Werth, so muß man $y = A + Bx^{-1} + Cx^{-2} + Dx^{-3} + \ldots$ setzen u. s. w.).

Nach derselben Methode lassen sich auch die Differenzialgleichungen von der Form $dY + \mathfrak{P}Y^{+}dx = \mathfrak{Q}Y^{++}dx$ integriren, worin Y, Y^{+}, Y^{++} verschiedene Funktionen von y und $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ verschiedene Funktionen von x ausdrücken, wenn nur folgende Bedingung eintritt: weil

aus der gegebenen Gleichung folgt $\frac{dY}{Y^{++}} + \frac{n\mathfrak{P}\,Y^{+}\,dx}{Y^{++}} = \mathfrak{Q}\,dx$ oder $\frac{n\,dY}{Y^{++}} + \frac{n\mathfrak{P}.\,Y^{+}dx}{Y^{++}} =$ $= n\mathfrak{Q}\,dx$, so setze man, wenn $\frac{n\,dY}{Y^{++}} = d\left(\frac{Y^{+}}{Y^{++}}\right)$, $\frac{Y^{+}}{Y^{++}} = z$, und man erhält $dz + n\mathfrak{P}z\,dx = n\mathfrak{Q}\,dx$ und itzt wird nach II. integrirt [n ist Konstante].

III. Wenn der Koeffizient der Differenzialfunktion des ersten Grades ist, als $(a+bx+cy)\,dx+(e+fx+gy)\,dy=0$, so setze man $a+bx+cy=u$ und $e+fx+gy=z$, so wird $gudu-cudz-fzdu+bzdz=0$ und diese Gleichung ist nach I. integrabel.

IV. Durch verschiedene Kunstgriffe lassen sich noch folgende Gleichungen integriren:

a. $\alpha y\,dx+\beta x\,dy+x^m y^n(\gamma y\,dx+\delta x\,dy)=0$, man setze $t=x^\alpha y^\beta$ und $u=x^\gamma y^\delta$, so wird man finden $\frac{(t)^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}}{\gamma n-\delta m}+\frac{(u)^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}}{\alpha n-\beta m}=C$

b. $y\,dy+dy(a+bx+nx^2)=y\,dx(c+nx)$, man setze $u=\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+cx^2}$, so wird man finden $\frac{dx}{(a+bx+nx^2)(c+nx)}=\frac{du}{u(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}$.

c. $(y-x)\,dy=\frac{n\,dx(1+y^2)\sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{(1+x^2)}}$, setzt man $y=\frac{x-u}{1+xu}$, ferner $1+u^2=t^2$ und dann $t=\frac{1+s^2}{2s}$: so hat man $\frac{dx}{1+x^2}=\frac{2\,ds}{1+s^2}-\frac{2n\,ds}{n+1+(n-1)s^2}$.

d. $dy+y^2dx=ax^m dx$ wird integrirt werden können, wenn $m=-4$, $m=-\frac{4}{5}$, $m=-\frac{8}{5}$, $m=-\frac{12}{5}$, $m=-\frac{12}{7}$, $m=-\frac{16}{7}$..... überhaupt, wenn $m=-\frac{4c}{2c\pm 1}$. (Erfinder Graf Riccati).

b. Integration der Differenzialgleichungen des ersten Grades, in welchen höhere (ganze) Potenzen dieser Differenzialien vorkommen.

Aus solchen Differenzialgleichungen kann man die endliche Gleichung nicht unmittelbar durchs Integriren erhalten, weil jene Gleichungen nicht durch die unmittelbare Differenzirung dieser Gleichungen entstehen können. Es entstehen aber die genannten Gleichungen durch das Produkt mehrerer Gleichungen, in welchen die Differenzialien der ersten Potenz sind, sie drücken also in einem dasjenige aus, was in allen diesen einzeln enthalten ist. Hieraus sieht man schon, wie man das Integral einer Differenzialgleichung mit höhern Potenzen ihrer Differenzialien finden könne, wenn man dieselbe in Gleichungen auflöst, in welchen die Differenzialien nur der ersten Potenz sind und sodann jede dieser Gleichungen für sich integrirt.

Auf diese Art bekömmt man so viel endliche Gleichungen als der höchste Exponent der vorgelegten Gleichung Einheiten enthält; dieser Exponent ist nämlich die Summe der Exponenten von Differenzialien beider veränderlichen Größen in jedem Gliede. Multiplizirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man eine einzige Gleichung, welche das gesuchte Integral ist.

Das Auflösen der vorgelegten Gleichung in ihre einfachen Gleichungen geschieht nach den bekannten Regeln der Theorie der höhern Gleichungen; wir werden uns aber hier einer andern Methode bedienen, die allgemeiner und leichter ist.

Man setze durchaus statt dy, $p\,dx$ oder statt dx, $p\,dy$, wo p eine neue veränderliche Größe ist, und substituire, so wird man immer auf eine gleichgeltende Gleichung kommen, welche an veränderlichen Größen entweder bloß p, oder p und x, oder p und y, oder p, x und y enthält. Wie man sich in jedem dieser Fälle benehmen müsse folgt:

1. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß p enthalten, so hat man $A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots = o$, woraus $p + m = o$, $p + n = o$, $p + q = o$, $p + r = o$, ..., und itzt setze man für p seinen Werth und integrire u. s. w.

2. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß p und x enthalten: so hat man immer $X + X^{+}p + X^{++}p^2 + X^{+++}p^3 + \ldots = o$ oder $P + P^{+}x + P^{++}x^2 + P^{+++}x^3 + \ldots = o$, woraus $p + X^{-} = o$, $p + X^{--} = o$, $p + X^{---} = o$ u. s. w., oder auch $x + P^{-} = o$, $x + P^{--} = o$, $x + P^{---} = o$, u. s. w.; in ersten Fall braucht man nur für p seinen Werth zu setzen und zu integriren u. s. w.; im zweiten Falle folgt aus $x = -P^{-}$ u. s. w., $dx = -dP \ldots$, und $p\,dx = dy = -p\,dP$, ... und itzt integrirt man. Auf diese Art hat man x und y durch p ausgedrückt, woraus wenn man will auch x durch y ausgedrückt werden kann u. s. w.

3. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung blos p und y enthalten, so hat man $Y + Y^{+}p + Y^{++}p^2 + Y^{+++}p^3 + \ldots = o$ oder $P + P^{+}y + P^{++}y^2 + \ldots = o$, woraus $p + Y^{-} = o$, $p + Y^{--} = o$, $p + Y^{---} = o$ u. s. w., oder $y + P^{-} = o$, $y + P^{--} = o$ u. s. w.; im ersten Falle setze man statt p, $\frac{dy}{dx}$, so wird $\frac{dy}{Y^{-}} = -dx$ u. s. w.; im zweiten Falle hat man auch $dy = -dP^{-}$ oder $\frac{dy}{p} = dx = -\frac{dP}{p}$ u. s. w.

4. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung p, x und y enthalten, so kann man nicht in jedem Falle die zwischen x und y statt findende Gleichung finden, sondern nur in folgenden einzelnen Fällen.

a. Wenn die Gleichung ohne Rücksicht auf p, bloß in Bezug auf x und y homogen ist, so setze man $y = xz$ oder $x = yz$ (unter homogen wird hier verstanden, daß die Summe von Exponenten der x und y in jedem Gliede = groß sey), auf diese Art erhält

man eine Gleichung zwischen z und p, woraus sich p durch z oder z durch p ausdrücken läßt; es sey z. B. $z=f(p)$ und $p=F(z)$; und da nun $dy=xdz+zdx$, so wird im ersten Falle $dy=xdf(p)+dxf(p)=pdx$, diese Gleichung gibt x durch p, also auch dx durch p, dp daher $\frac{dx}{p}=dy$ durch p, dp u. s. w.; im zweiten Falle wird aus $dy=$ $=pdx=xdz+zdx$, $(p-z)dx=xdz$, $\frac{dx}{x}=\frac{dx}{F(z)-z}$, integrirt und für z, $\frac{y}{x}$ substituirt u. s. w.

b. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung eine der veränderlichen Größen x und y bloß mit der ersten Potenz vorkömmt, wie z. B. $ay-x^2.\pm\sqrt{(1+p^2)}=0$, in diesem Falle differenzire man und setze für dy, pdx, so erhält man eine Gleichung zwischen p und x, hat man aus dieser Gleichung p durch x ausgedrückt, so setze man statt p, $\frac{dy}{dx}$, so erhält man eine Gleichung zwischen y und x; hat man aber x durch p ausgedrückt, so differenzire man, multiplizire mit p, und setze für pdx, dy u. s. w.

c. Integration der höhern Differenzialgleichungen, in welchen die höhern Differenzialien bloß der ersten Potenz sind (z. B. $d^m y$, nicht $(d^m y)^n$).

Eine höhere Differenzialgleichung des m^ten^ Grades (die höhern Differenzialien sind bloß der ersten Potenz) wird durch mmalige Differenzirung einer und derselben endlichen Gleichung erhalten; man findet also auch aus einer höhern Differenzialgleichung des m^ten^ Grades die endliche Gleichung, oder das Integral der höhern Differenzialgleichung, wenn man dieselbe nach einander mmal integrirt, und nach der ersten Integration die Konstante $c\,dx^{m-1}$, nach der zweiten die Konstante $d\,dx^{m-2}$, nach der dritten die Konstante $e\,dx^{m-3}$ u. s. w. hinzusetzt, vorausgesetzt, daß beim Differenziren dx als das beständige Inkrement angesehen worden ist; der Grund hievon ist leicht einzusehen. Diesem nach wird das Integral der Gleichung $2.3.c.xdx^2+4h.y^3d^2y+3.4.h.y^2dy^2=0$ so gefunden: $2.3.c\frac{x^2dx}{2}+$ $+4h\int(y^3d^2y+3y^2dy^2)=cdx$ oder $3cx^2dx+4hy^3dy=cdx$ und zum zweiten mal integrirt $cx^3+hy^4=cx+d$. Aber nicht jede höhere Differenzialgleichung ist so leicht zu integriren wie diese, wir werden daher itzt eine allgemeine Methode angeben, nach welcher alle höhern Differenzialgleichungen integrirt werden müssen.

Anmerkung. Wenn in irgend einer Aufgabe die 3 veränderlichen Größen x, y, s vorkommen, die von einander wechselseitige Funktionen sind, und man nimmt nach einander dx, dy, ds als das beständige Inkrement an, so wird man in allen drei Fällen drei verschiedene höhere Differenzialgleichungen erhalten, ihr Integral wird aber dasselbe seyn müssen, widrigenfalls die Aufgabe keine bestimmte Gleichung zuläßt. Man sieht auch, daß eine oder die andere von diesen höhern Differenzialgleichungen leichter zu integriren seyn könne als die andere, und daß es also von großem Nutzen

wäre, wenn man im Stande wäre aus einer vorgelegten höhern Differenzialgleichung, in welcher dx oder dy oder ds als beständiges Inkrement betrachtet werden, die andern Gleichungen herzuleiten, in welchen ds oder dy oder dx als beständig angesehen wird. Dieses kann man nun wirklich und zwar auf folgende Art: es sey z. B. $b\,ds^2 + a\,d^2y + x\,d^2x = o$ wo ds beständig, so setze man $dy = p\,ds$, $dp = q\,ds$, also $d^2y = d(p\,ds) = ds\,dp = q\,ds^2$, und $dx = P\,ds$, $dP = Q\,ds$, also $d^2x = Q\,ds^2$, so wird $b\,ds^2 + aq\,ds^2 + xQ\,ds^2 = o$, oder $b + aq + xQ = o$, oder $b + a\frac{dp}{ds} + {}$ $+ x\frac{dP}{ds} = o$ oder $b\,ds + a\,dp + x\,dP = o$, da nun $dp = d\left(\frac{dy}{ds}\right)$ und $dP = d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, so hat man, wenn man alles als veränderlich annimmt, $b\,ds^3 + a\,ds\,d^2y - a\,dy\,d^2s + x\,ds\,d^2x - x\,dx\,d^2s = o$, welche Gleichung unmittelbar die geforderten gibt, wenn man darin $d^2y = o$, oder $d^2x = o$ setzt.

Diese Methode besteht darin, daß man erstens folgende Substitutionen macht: (vorausgesetzt dx als beständig) $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, ... woraus $d^2y = q\,dx^2$, $d^3y = r\,dx^3$, $d^4y = s\,dx^4$, ..., wo p, q, r, ... endliche veränderliche Größen (mittelst dieser Substitution gelangt man immer zu einer gleichgeltenden endlichen Gleichung) und sodann zweitens nach Verschiedenheit der in der Gleichung zurückgebliebenen Buchstaben weiter operiret, wie wir vor allen

A. an den Differenzialgleichungen des 2ten Grades zeigen wollen:

1. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß q enthalten als: $aq + b = o$, so wird $a\,dp + b\,dx = o$, daher $ap + bx = C$ und ferner $a\,dy + bx\,dx = {}$ $= C\,dx$, also $ay + \frac{bx^2}{2} = Cx + D$.

2. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß q und p enthalten, z. B.: $aq + bp = c$, so sage $a\frac{dp}{dx} + bp = c$, daher $bp = c - e^{(D-x)\frac{b}{a}}$ und $\int b\,dy = \int\Big(c -$ $- e^{(D-x)\frac{b}{a}}\Big)dx + H$.

3. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß q und x enthalten z. B.: $Xq + X^{-} = c$ (X und X^{-} beliebige Funktionen von x) so sage $X\,dp + X^{-}\,dp = c\,dx$, woraus $p + \int\frac{X^{-}}{X}.dx = c\int\frac{dx}{X} + \mathfrak{M}$, daher $\int dy = \int\Big(-dx\int\frac{X^{-}dx}{X} + c\,dx\int\frac{dx}{X} + {}$ $+ \mathfrak{M}\,dx\Big) + H$.

4. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß q und y enthalten z. B.: $Yq + Y^{-} = c$ (Y und Y^{-} beliebige Funktion v. y) so sage $Y\frac{dp}{dx} + Y^{-} = c$, $Y\frac{p\,dp}{p\,dx} + Y^{-} = {}$ $= c$, $Y\frac{p\,dp}{dy} + Y^{-} = c$, woraus $p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\left(2\int\left(-\frac{Y^{-}dy}{y} + \frac{c\,dy}{y}\right) + D\right)}$ und hieraus $\int dx = \int\frac{\pm dy}{\sqrt{(2\int(\ldots) + 2D)}} + N$ also 2 Gleichungen.

5. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung q, p und x enthalten z. B. $aq+Xp=X^{-}$ (wo X und X^{-} beliebige Funktionen von x) so sage $a\,dp+Xp\,dx=X^{-}dx$ und diese Gleichung wird nach Seite 1243 No. 2 integriret.

6. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung q, p, y enthalten z. B.: $aq+Yp=Y^{-}$ (wo Y und Y^{-} beliebige Funktionen von y) so sage $\frac{a\,dp}{dx}+Yp=Y^{-}$, $\frac{ap\,dp}{p\,dx}+ +Yp=Y^{-}$; $\frac{ap\,dp}{dy}+Yp=Y^{-}$, woraus $p\,dp=\left(\frac{Y^{-}-Yp}{a}\right)dy$ und diese Gleichung wird nach S. 1250 No. 3 integrirt.

7. und 8. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung q, x, y oder wohl gar q, p, x, y enthalten.

Für diese Fälle kennt man noch keine allgemeine Auflösung; und nur in dem Falle, wenn die vorgelegte Differenzialgleichung homogen ist, gibt Euler eine Methode an, nach welcher sich bisweilen das Integral finden läßt; die Differenzialgleichung wird aber homogen genannt, wenn die Summe von Dimensionen in jedem ihrer Glieder = groß ist: z. B. $x^2d^2y+ +x\,dx^2+y\,dy^2=0$, hieraus $qx^2+x+yp^2=0$; (diese Gleichung ist ebenfalls homogen, denn $q=\frac{dp}{dx}$ ist eine negative Dimension, da p eine Zahl ist) nun setze man $y=ux$ und $q=\frac{v}{x}$, so erhält man $v+1+up^2=0$, es ist aber aber auch wegen $dy=u\,dx+x\,du$ und $dy=p\,dx$, $\frac{du}{p-u}=\frac{dx}{x}$, ferner wegen $dp=q\,dx$ und $q=\frac{v}{x}$, $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{v}$ und durch Kombination dieser 5 Gleichungen kann man auf Gleichungen gelangen, die sich integriren lassen, als z. B. aus der 1ten, $v=-1-up^2$ also $\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{-1-up^2}$ oder $du+ +up^2du=u\,dp-p\,dp$ u. s. w.

B. Bei den Differenzialgleichungen des dritten Grades verfährt man auf ähnliche Art

1. Wenn nach der genannten Substitution in der vorgelegten Gleichung bloß r enthalten z. B.: $ar=b$, so sage $a\,dq=b\,dx$, $aq=bx+C$, $a\,dp=bx\,dx+C\,dx$, $ap=\frac{bx^2}{2}+Cx+ +D$, $ay=\frac{bx^3}{2.3}+\frac{Cx^2}{2}+Dx+E$.

2. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß r und q enthalten z. B.:

$ar+bq=c$, sage $a\,dq+bq\,dx=c\,dx$, $ac^{\frac{bx}{a}}q=c\int c^{\frac{bx}{a}}dx+C$, $a\,dp= =\frac{dx.c\int c^{\frac{bx}{a}}dx}{c^{\frac{bx}{a}}}+\frac{C\,dx}{c^{\frac{bx}{a}}}\ldots ay=\int\left(dx\int\left(\frac{dx.c\int c^{\frac{bx}{a}}dx}{c^{\frac{bx}{a}}}+\frac{C\,dx}{c^{\frac{bx}{a}}}\right)\right)+Dx.$

3. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß r und p enthalten z. B. $ar + bp = c$, so $a\frac{qdq}{qdx} + bp = c$, $\frac{aqdq}{dp} + bp = c$, $aq^2 + bp^2 = 2cp + C$, $q = \frac{dp}{dx} = \Gamma(C \ldots)$, ... $x = f(p)$ u. s. w.

4. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung bloß r und x enthalten z. B. $ar + bx = c$, so $adq + bxdx = cdx$, ... $\frac{adp}{dx} + \frac{bx^2}{2} = cx + C$ u. s. w.

5. 6 und 7. Wenn in der gleichgeltenden Gleichung blos r, y, oder r, p, q, oder r, q, x, oder r, p, x, oder r, p, q, x, oder r, p, x, y .... enthalten.

Für alle diese Fälle gibt es keine allgemeinen Methoden.

d. Integration der höhern Differenzialgleichungen, in welchen die höhern Differenzialien noch auf höhere ganze und positive Potenzen erhoben vorkommen.

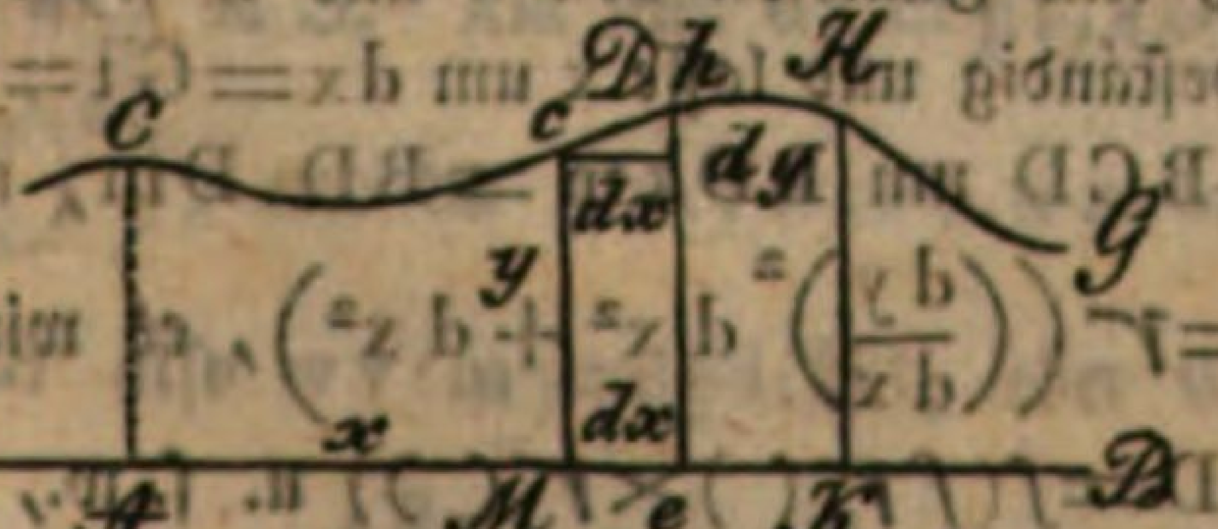
Ist das höchste Differenzial in der vorgelegten Gleichung $= d^n y$ und sein höchster Exponent $= m$ als $(d^n y)^m$, so finden in der Aufgabe für $d^n y$, m Werthe Statt, diese m Werthe findet man aber entweder durch die algebraische Auflösung der Gleichung in ihre einfachen Faktoren oder man findet sie durch die oben S. 227 genannte Substitution. Wir wollen hier bloß die Substitution zeigen, als: es sey z. B. $a(d^2y)^2 + bdydx^3 = 0$, so setze man $dy = pdx$, $dp = qdx$ (bei höhern noch $dq = rdx$ u. s. w.) woraus $d^2y = qdx^2$ ($d^3y = rdx^3$, ...) also $a(qdx^2)^2 + bpdx.dx^3 = 0$, oder $aq^2 + b.p = 0$, daher $2aqdq + bdp = 0$, $2adq + bdx = 0$, $2aq + bx = C$, $2adp + bxdx = Cdx$ u. s. w.

C. Integration der Differenzialfunktionen in welchen drei veränderliche Größen vorkommen.

Allgemeine Betrachtungen über die Differenzial- und Integralrechnung und ihren Nutzen.

Einige Anwendungen der Differenzialrechnung und Integralrechnung als vorhergehende Erläuterung zu C.

1. Man soll den körperlichen Inhalt jenes Körpers finden, der durch die Umdrehung der Fläche ACHK um die Axe AK erzeugt wird.



x, y rechts Koordinaten der Kurve CDHG, A Anfangspunkt der Abscissen, AB Abscissenlinie.

Der kubische Gehalt des Körpers, den das Flächeninkrement ehMe erzeugt hat und welcher als ein abgestutzter Kegel betrachtet werden kann ist $= \left(\frac{(y + dy)^2 \pi + y^2 \pi}{2}\right) dx =$

$=\left(\frac{y^2\pi+y^2\pi}{2}\right)dx=y^2\pi dx$, oder weil y durch x gegeben seyn muß, z. B. $y=X$, $=X^2\pi dx$; da nun dieser Inhalt das Differenzial des ganzen von CDMA erzeugten Körpers ist, so wird der kubische Inhalt dieses Körpers selbst $=\int X^2\pi dx$ seyn u. s. w.

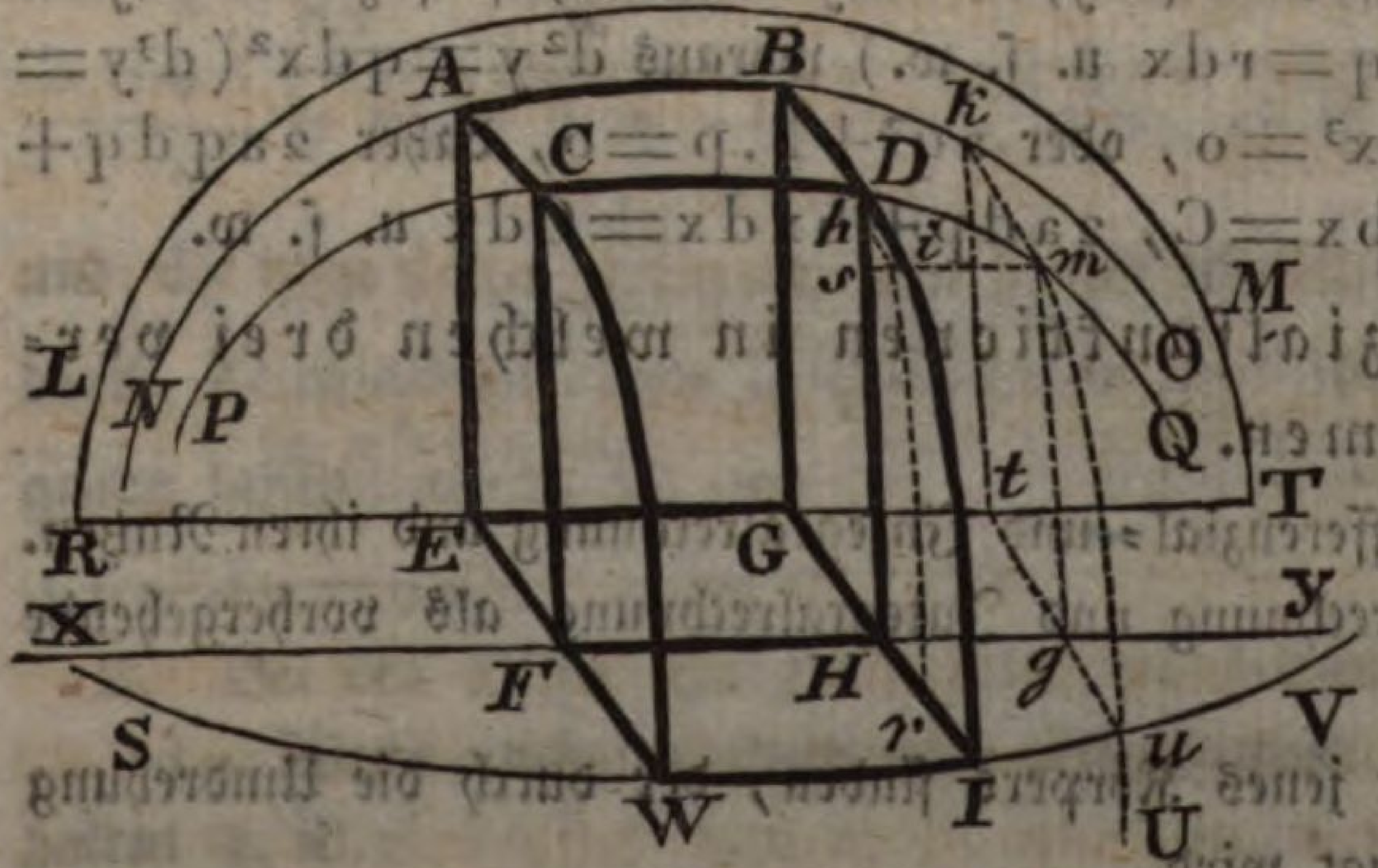
2. Man soll die Oberfläche des genannten Körpers finden.

Weil die Oberfläche des durch das Element ChMe erzeugten Körpers als die Oberfläche eines abgestutzten Kegels angesehen werden kann, so wird dieselbe seyn $=\left(\frac{2(y+dy)\pi+2y\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{(dx^2+dy^2)}=2y\pi\sqrt{(dx^2+dy^2)}=2X\pi\sqrt{(dx^2+dX)}$ u. s. w.

3. Man soll die Gleichung zwischen rechtwinklichten Koordinaten für jene Kurve finden, deren Subtangente der doppelten Abscisse = ist.

Für die Subtangente hat man allgemein die Gleichung Subtg $=y.\frac{dx}{dy}$, also für unsern Fall $2x=\frac{ydx}{dy}$, woraus $=\frac{dx}{x}$, $2\log y=\log x+\log C$ u. s. w.

4. LMSV ist ein Körper, der durch Umdrehung einer Fläche entstanden, so daß alle Ebenen AEW, BGI, die auf die gedachte Linie R senkrecht und zu einander parallel gelegt werden, Kreisflächen sind; Ebenen aber, die zu den Ebenen RLMT und RXSWVT, die auf einander und AEW senkrecht stehen, parallel gelegt werden, sind ähnliche Ebenen, d. h. sie werden mit ähnlichen Kurven begränzt. $EG=x=$ $=FH$, $EF=z=GH$, $HD=y$ und zwischen diesen Koordinaten besteht eine allgemeine Gleichung. Es wird also das Stück ABCD der krummen Oberfläche des vorgelegten Körpers, so wie auch der körperliche Inhalt des Stückes EFHGABCD bloß eine Funktion von x und z seyn.

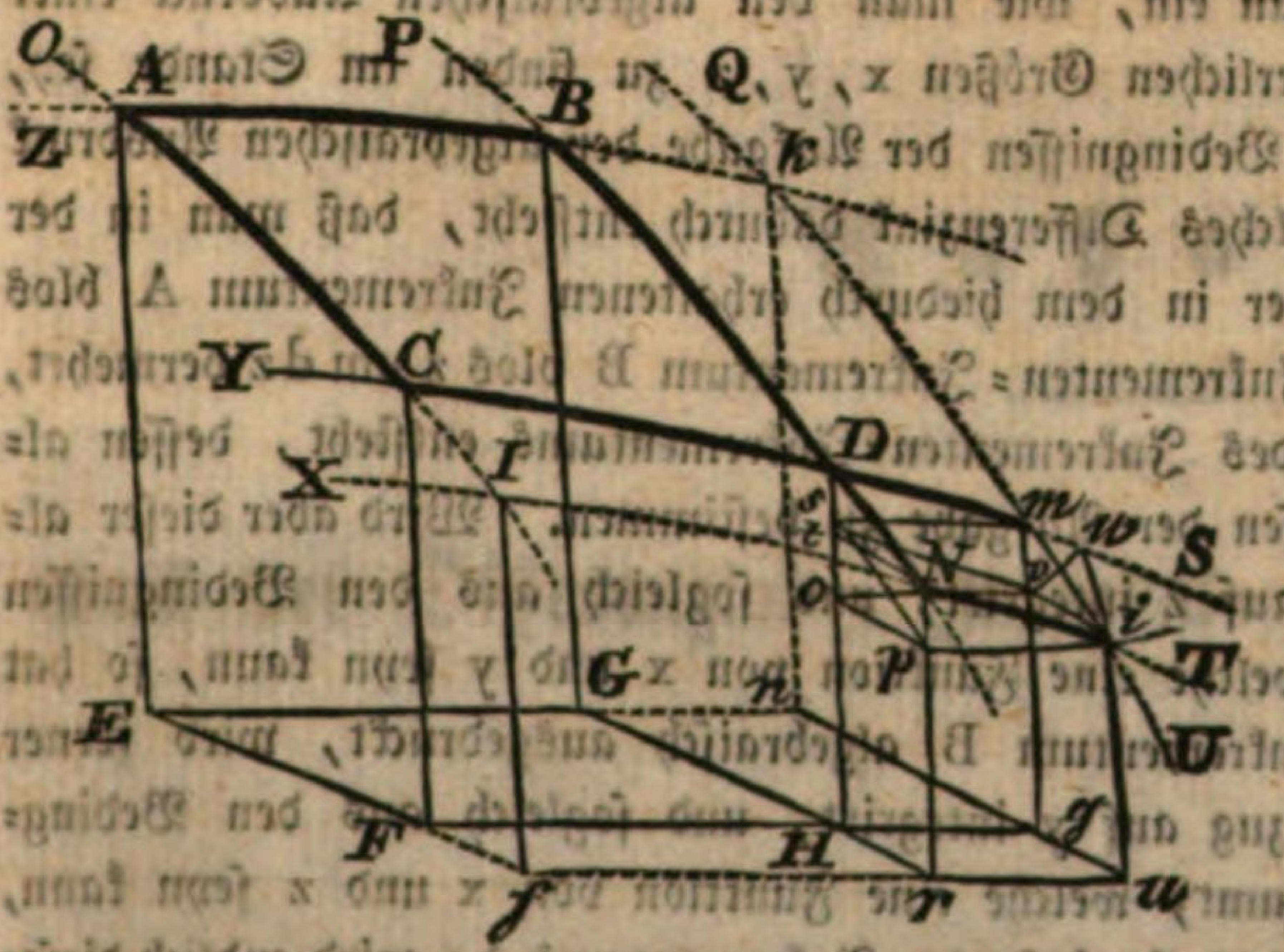


Um diese Funktionen zu finden, betrachte man z als beständig und lasse x um $dx=Gt=Hg=$ $=sm$ wachsen, so wächst hiedurch die Fläche ABCD um $BDkm=BD.Dm$, nun ist aber $BD=\int\sqrt{\left(\left(\frac{dy}{dz}\right)^2dz^2+dz^2\right)}$ und $Dm=\sqrt{\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx^2+dx^2\right)}$, es wird also $BDkm=\int\sqrt{(\ )}\times\sqrt{(\ )}$, und demnach $ABCD=\int(\int\sqrt{(\ )}\times\sqrt{(\ )})$ u. s. w., wo zu bemerken, daß $\int\sqrt{(\ )}$ bloß in Beziehung auf z, $\int(\int\sqrt{(\ )}\times\sqrt{(\ )})$ aber in Beziehung auf x zu nehmen ist, auch die Konstante darf nicht vergessen werden. Der Körper ABCDEFGH wächst aber hiedurch um $BkDmGtHg=BGDH.Gt=\int ydz.dx$, es wird also

$ABCDEFGH = \int(\int y\,dz . dx)$ wo $\int y\,dz$ bloß in Bezug auf z, $\int(\int y\,dz . dx)$ aber bloß in Bezug auf x zu integriren ist.

Hat man den algebraischen Ausdruck für die Fläche ABCD und den Körper ABCD EFGH gefunden, so läßt sich hieraus sehr leicht die Fläche ABWI und der Inhalt des Körpers ABWIEG finden.

5. Es sey OPQR...UZ was immer für eine unbegränzte krumme Fläche, $EG = x$, darauf senkrecht $GH = z$, und hierauf wieder senkrecht $HD = y$, zwischen diesen Koordinaten besteht irgend eine Gleichung, man verlangt den Flächeninhalt des Stücks ABCD.



Läßt man x um $dx = Gn = Hg$ wachsen, ohne z zu ändern, so wächst hiedurch ABCD um BkDm, läßt man aber bloß z wachsen um $dz = Hr = Ff$, so wächst hiedurch ABCD um CDIN.

Vermehrt hat man nun einen von diesen Streifen z. B. Bm dadurch, daß man z um $dz = Hr = gu$ vermehrt ohne dabey x um dx zu ändern, so erhält man DmNi.

Hier ist $Ds = pN = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, $tD = \left(\frac{dy}{dz}\right) dz = vm$, also $oD = ot + tD = pN + tD = Ds + tD = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{dy}{dz}\right) dz$.

Die Seiten des Elementes DNmi kann man als gerade, die Fläche des Elementes als eben und seine Seiten mi, DN und Dm, Ni zu einander $\parallel$, aber auf einander nicht als senkrecht annehmen. Der Flächeninhalt des genannten Elementes wird also $= Ni . iw$, wenn $iw \perp mS$. Da nun $dx = pi$, $sD = pN = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, so wird $Ni = dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, und da $\angle mvw = vwm = Npi = R$, so sind die Dreiecke Npi und mwv $\backsim$ also $wv : mv = pi : Ni$, oder $wv : \left(\frac{dy}{dz}\right) dz = dx : dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, woraus

$$wv = \frac{\left(\frac{dy}{dz}\right) dz}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \text{ und } iw^2 = wv^2 + vi^2, \; iw = \frac{dz \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$$

also die Fläche des Elementes $iNDm = dx\,dz\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}$. Der algebraische Ausdruck für die Fläche ABCD wird diesem nach erhalten, wenn man $dx\,dz \times \sqrt{(\ldots)}$ einmal in Beziehung auf x oder z, und das zweite mal in Beziehung auf z oder x integriret, oder $ABCD = \int\int dx\,dz\sqrt{(\ldots)}$. Auch die Konstante nach jeder Integration darf nicht vergessen werden.

Aus dem Vorhergehenden sieht man ein, wie man den algebraischen Ausdruck einer Funktion von mehrern z. B. 3 veränderlichen Größen x, y, z zu finden im Stande sey, wenn man nur im Stande ist aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck jenes letzten Differenzials zu finden, welches Differenzial dadurch entsteht, daß man in der Aufgabe bloß x um dx vermehrt, ferner in dem hiedurch erhaltenen Inkrementum A blos y um dy vermehrt, endlich in diesem Inkrementen-Inkrementum B blos z um dz vermehrt, wodurch endlich jenes Inkrementum C des Inkrementen-Inkrementums entsteht, dessen algebraischer Ausdruck aus den Bedingnissen der Aufgabe zu bestimmen. Wird aber dieser algebraische Ausdruck blos in Beziehung auf z integrirt, und sogleich aus den Bedingnissen der Aufgabe die Konstante bestimmt, welche eine Funktion von x und y seyn kann, so hat man das oben besagte Inkrementen-Inkrementum B algebraisch ausgedrückt, wird ferner dieser algebraische Ausdruck bloß in Bezug auf y integrirt, und sogleich aus den Bedingnissen der Aufgabe die Konstante bestimmt, welche eine Funktion von x und z seyn kann, so hat man den algebraischen Ausdruck des ebenbesagten Inkrementums A; wird endlich dieser algebraische Ausdruck blos in Bezug auf x integrirt, so hat man den algebraischen Ausdruck der ursprünglichen Funktion x, y, z, wozu noch die Konstante, die eine Funktion von z und y seyn kann, hinzuzusetzen kömmt u. s. w.

Man merke noch folgenden Satz: wenn eine Differenzialfunktion $= 0$ ist, so erhält man ihr vollständiges Integral, wenn man sie nach den Regeln der Integralrechnung ohne Hinzusetzung einer Konstante integrirt und von diesem Integral den Werth desselben Integrals im Anfangspunkte abzieht.

Anhang.

Geist der Differenzial-, Integral- und Variations-Rechnung.

Anhang.

Geist der Differenzial-, Integral- und Variations-Rechnung.

Geist der Differenzial-, Integral- und Variations-Rechnung.

$F(x,y,z)$ bedeutet eine solche veränderliche Größe, welche von den veränderlichen Größen x, y, z dergestalt abhängt, mit selbiger dergestalt nach einem steten Gesetze verändert wird, daß es einen algebraischen Ausdruck gibt, wodurch allgemein für jedes x, y und z die diesem entsprechende $F(x,y,z)$ ausgedrückt wird.

In einer solchen $F(x,y,z)$ besteht zwischen x, y, z eine Relation, irgend eine Gleichung, oder nicht; im ersten Falle wächst y und z um bestimmte Inkremente $\Delta y, \Delta z$, wenn x um ein bestimmtes Inkrementum Δx wächst, im letzten Falle hingegen können x, y, z um die beliebigen Inkremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ wachsen.

In dem einen oder in dem andern Falle heißt $\Delta F(x,y,z)$ jenes Inkrementum, worum $F(x,y,z)$ dadurch wächst, daß darin x um Δx, y um Δy, z um Δz wachsen. Jene Operation nun, in jeder $F(x,y,z)$ den algebraischen Ausdruck von $\Delta F(x,y,z)$ zu finden, heißt endliche Differenzirung *), und besteht im Allgemeinen darin, in jeder vorkommenden $F(x,y,z)$ die veränderlichen Größen x, y, z um $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ wachsen zu lassen, und von dieser solchergestalt veränderten Funktion abzuziehen $F(x,y,z)$, wo dann der erhaltene Rest $= \Delta F(x,y,z)$.

Läßt man in einer solchen $F(x,y,z)$ die veränderlichen Größen x, y, z statt um die zusammengehörigen endlichen Inkremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ um die zusammengehörigen Nullinkremente dx, dy, dz von derselben Kategorie als $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ wachsen (wo dx, dy, dz, wenn zwischen x, y, z keine Gleichung besteht, Nulle mit beliebigen Koeffizienten, hingegen Nullen mit bestimmten Koeffizienten sind, wenn in dx der Koeffizient der Nulle bestimmt ist, und wenn zwischen x, y, z eine bestimmte Gleichung besteht), so wächst $F(x,y,z)$ zwar um Null, aber nicht um eine beliebige Nulle, sondern um Produkte aus endlichen Koeffizienten in eine jedesmalige absolute Nulle, welches Inkrementum Null durch $dF(x,y,z)$ bezeichnet wird. Die Operation, mittelst welcher man den algebraischen Aus-

*) Anmerkung. Die endliche Differenzirung ist eine Operation der Differenzrechnung überhaupt, welche letztere allgemein die Methode in sich begreift, in dem jedesmaligen Falle zusammengehörige endliche Inkremente in eine Gleichung zu bringen, und mit einer solchergestalt erhaltenen Gleichung nach den gewöhnlichen algebraischen Regeln zu verfahren.

druck von $d F(x,y,z)$ findet, heißt Differenzirung, und ist eine Operation der Differenzialrechnung, welche letztere die allgemeine Methode in sich begreift, die im jedesmaligen Falle zusammengehörigen Nullinkremente in eine Differenzialgleichung zu bringen, und mit dieser Differenzialgleichung dann nach den gewöhnlichen algebraischen Regeln eben so vorzugehen, als ob die in dieser Differenzialgleichung enthaltenen Differenzialausdrücke endliche Größen wären, welches z. B. bei der zwar richtigen Gleichung $b.o+c.o=o$ nicht anginge, da hier z. B. $\frac{b.o}{o}+\frac{c.o}{o}=o$ nicht wahr wäre; soll aber eine besagtermaßen mit Nullen verwebte Gleichung den gewöhnlichen algebraischen Operationen eben so unterliegen, als ob diese Nullen endliche Größen wären, so kann dieß nur dann statt finden, wenn eine solche Gleichung eine dem jedesmaligen Falle entsprechende Differenzialgleichung ist, welche anzusetzen das Geschäft der Differenzialrechnung ist; das folgt hieraus: eine in dem jedesmaligen Falle zwischen den zusammengehörigen Nullinkrementen angesetzte Gleichung ist nur dann eine diesem Falle entsprechende Differenzialgleichung, wenn diese Gleichung daraus hergeleitet worden, daß man die in demselben Falle zwischen den zusammengehörigen endlichen Inkrementen statt findende Gleichung richtig angesetzt, und in diese Gleichung statt der zusammengehörigen endlichen Inkremente die zusammengehörigen Nullinkremente von derselben Kategorie substituirt hat; findet z. B. in irgend einem Falle zwischen den zusammengehörigen endlichen Inkrementen Δx, Δy, die Gleichung statt: $a\Delta x+$ $+b\Delta y-c\Delta x\Delta y=o$, und es sind dx, dy zusammmengehörige Nullinkremente von derselben Kategorie als Δx, Δy, so ist in demselben Falle auch die Gleichung wahr: $adx+bdy-cdxdy=o$, oder $adx+bdy=o$, aus welcher Differenzialgleichung z. B. folgt $\frac{adx}{dy}+\frac{bdy}{dy}=o$ (da doch aus der willkührlich angesetzten Gleichung $a.o+b.o=o$ nicht folgt, $\frac{a.o}{o}+\frac{b.o}{o}=o$) daß aber aus dieser Differenzialgleichung besagtermaßen geschlossen werden könne, ergibt sich daraus: es ist im besagten Falle $a\Delta x+b\Delta y-$ $-c\Delta x\Delta y=o$, daher auch in diesem Falle $\frac{a\Delta x}{\Delta y}+\frac{b\Delta y}{\Delta y}-\frac{c\Delta x\Delta y}{\Delta y}=o$ eine richtige Gleichung ist, und zwar in soferne richtig bleibt, als in selbige was immer für zusammengehörige Inkremente von derselben Kategorie als Δx und Δy substituirt werden, folglich auch dann noch richtig bleibt, wenn statt Δx, Δy substituirt wird dx, dy, daher in diesem Falle die Gleichung richtig $\frac{adx}{dy}+\frac{bdy}{dy}-\frac{cdxdy}{dy}=o$ oder $\frac{adx}{dy}+\frac{bdy}{dy}=o$. Es beruht demnach allgemein jede Operation der Differenzialrechnung darauf: man setze die in dem gegebenen Falle zwischen den zusammengehörigen endlichen Inkrementen (von derselben Kategorie als die jedesmaligen zusammengehörigen Nullinkremente, von denen jedesmal die Rede

ist) aus den Bedingnissen der Aufgabe statt findende Gleichung an, und substituire dann in diese Gleichung statt der zusammengehörigen endlichen Inkremente die zusammengehörigen Nullinkremente von derselben Kategorie; so ist die dadurch erhaltene Gleichung, welche oft einer merklichen Abkürzung fähig seyn kann, die diesem Falle zwischen besagten Nullinkrementen entsprechende Differenzialgleichung, aus welcher alles eben so gefolgert werden kann, als wenn obbesagte Nullinkremente endliche Größen wären.

Eine $F(x, y, z)$ differenziren, heißt den algebraischen Ausdruck des Differenzials von $F(x, y, z)$ durch was immer für eine Methode finden. Das Differenzial von $F(x, y, z)$ ist jenes Inkrementum, worum $F(x, y, z)$ dadurch wächst, daß x, y, z um dx, dy, dz wachsen. Daher gibt es zweierlei Wege, $F(x, y, z)$ zu differenziren: 1) Die algebraische Differenzirung, wenn der algebraische Ausdruck von $F(x, y, z)$ bekannt ist, wo man blos das x, y, z um $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ vermehren, und von $F(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z)$ abziehen darf $F(x, y, z)$, und in diesen Rest statt $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ setzen darf dx, dy, dz, wo der erhaltene Ausdruck $= dF(x, y, z)$; 2) die nicht algebraische Differenzirung, wenn der algebraische Ausdruck von $F(x, y, z)$ nicht bekannt ist, man aber aus den Bedingnissen der Aufgabe (geometrisch, statisch, mechanisch, optisch, ...) den algebraischen Ausdruck jenes Inkrementums anzusetzen im Stande ist, worum $F(x, y, z)$ dadurch wächst, daß x um $\triangle x$, y um $\triangle y$, z um $\triangle z$ wachsen, in welchen Ausdruck man statt $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ setzt, dx, dy, dz. Hierauf beruht eigentlich die Möglichkeit durch Auflösung der durch Anwendung der Integralrechnung (entweder blos für sich allein, oder zugleich mit andern algebraischen Operationen verbunden) auflösbaren Aufgaben.

Die Integralrechnung (blos als Rechnungsmethode betrachtet) ist im Grunde nichts anders als jene algebraische Operation, mittelst welcher man bei dem gegebenen Ausdrucke des Differenzials einer Funktion die Funktion selbst findet, nämlich jenen algebraischen Ausdruck, welcher durch algebraische Differenzirung differenzirt, den vorgelegten algebraischen Differenzialausdruck gibt.

Ehe ein Weiteres über jene Fälle gesagt wird, in welchem mittel- oder unmittelbar durch Integralrechnung operirt wird, werde noch Folgendes angemerkt:

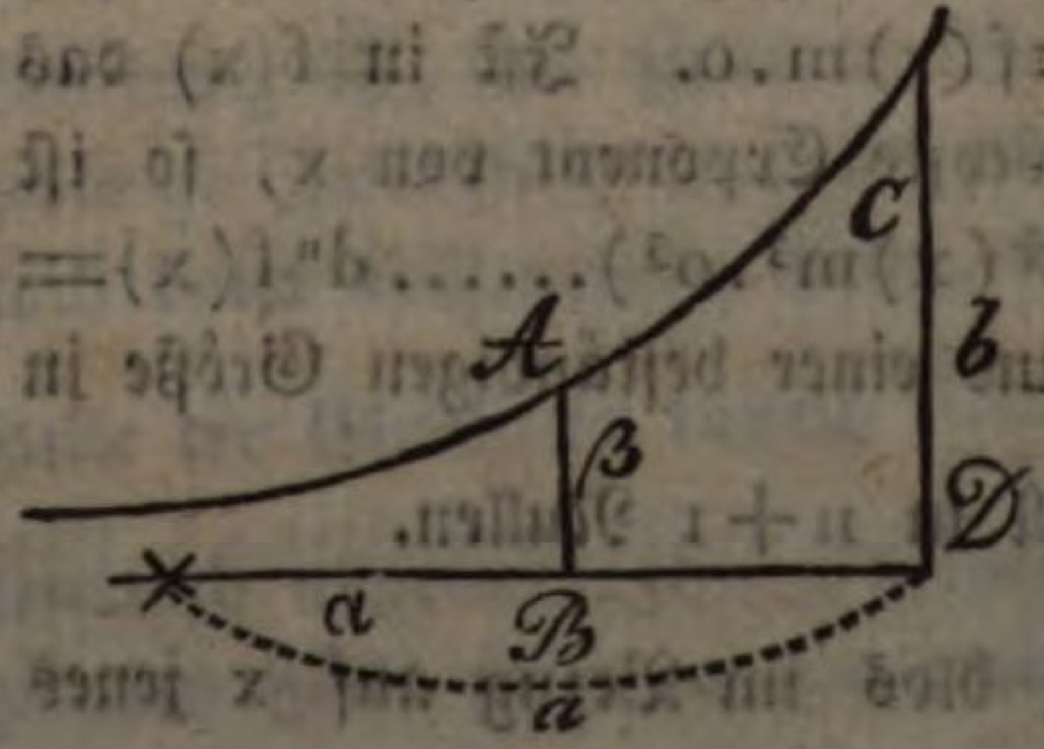
Ist $y = f(x)$, und ist dx eine Nulle mit einem beständigen Koeffizienten z. B. $= m.o$, so ist dy oder $df(x) = f(x + dx) - f(x) = f(x)dx$ oder $= f(x)m.o$. Ist in $f(x)$ das x mit lauter ganzen Exponenten enthalten, ferner n der höchste Exponent von x, so ist $(df(x) = f(x).m.o)$ $d^2f(x) = f^{+}(x)m^2.o^2)$ $(d^3f(x) = f^{++}(x)m^3.o^3)$...... $d^nf(x) = f^{++\cdots\cdots}(x^0)m^n, o^n, \ldots\ldots = C.o^n =$ dem Produkte aus einer beständigen Größe in n Nullen, und $d^{n+1}f(x) = \frac{o}{x}.o^{n+1}$ dem Produkte aus Null in $n + 1$ Nullen.

In $F(x, y, z) = o$ heißt partial differential von v blos im Bezug auf x jenes

Inkrementum, worum v wächst, wenn darin blos x um dx zunimmt, hingegen y und z als beständige Größen betrachtet werden; dieß wird so bezeichnet $dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$; sey z. B. $r = ax^2 + by^3 + cy^4$, so ist $\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = 2axdx$, und da ist der Satz zu merken: $dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dr}{dz}\right)dz$. Diese Partialdifferenzialien verwechsle man aber nicht mit jenen $\left(\frac{dv}{dx}\right)dx\left(\frac{d\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)dx\right)}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{d\left(\left(\frac{d\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)dx\right)}{dy}\right)dy\right)}{dz}\right)dz$, woselbst erstlich blos in Bezug auf x differenzirt wird, ferner das dadurch erhaltene Partialdifferenzial blos in Bezug auf y differenzirt wird, endlich das hiedurch erhaltene Partialdifferenzial blos in Bezug auf z differenzirt wird.

Wenn aus der Bedingniß einer Aufgabe eine Funktion gleich einer beständigen Größe C ist, so ist in derselben Aufgabe das Differenzial $= 0$, daher umgekehrt, wenn in einer Aufgabe irgend ein Differenzialausdruck $= 0$, so ist deren Integral in derselben Aufgabe $=$ einer beständigen Größe. Denn sey z. B. $ax + by^2 = C$, so ist auch $a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y)^2 = C$ ($ax + a\Delta x + by^2 + 2by\Delta y + b\Delta y^2 = C$, daher auch $a\Delta x + 2by\Delta y + b\Delta y^2 = 0$, und eben so $adx + 2bydy + bdy^2 = 0$, oder $adx + 2bydy = 0$, oder $d(ax + by^2) = 0$, ... Ein $= 0$ gesetzter Differenzialausdruck ist nie deßhalb $= 0$, weil in jedem Gliede, ein d enthalten ist, sondern wäre auch dann noch Null, wenn die in einem solchen Ausdrucke enthaltenen Differenzialien dx, dy, dz zusammengehörige endliche Differenzen Δx, Δy, dz wären, wo dann dieser endliche Differenzialausdruck vom vorgelegten Differenzialausdrucke blos darin verschieden wäre, daß im erstern noch alle Glieder enthalten wären, welche im letztern wegfallen, die aber auch stehen bleiben könnten. Da nun eine solche Differenzfunktion allemal $= 0$ bleibt, man mag wie immer oft durch Δx, Δy oder Δz dividiren, so gilt dies auch von der $= 0$ gesetzten Differenzfunktion im Bezug auf dx, dy, dz...

Man kann eine $f(x, y)$ von jedem beliebigen Punkte zu zählen anfangen, welches, einmal festgesetzt, jenes Stück von $f(x, y)$ bestimmt, das z. B. $x = a$ und $y = b$ entspricht, wie z. B. hier ABCD. Hier heißt α und β das x und y im Anfangspunkte (nämlich jene Werthe von x und y, welche jenem Punkte B entsprechen, von wo an F(xy) gemessen wird, wo also F(xy) dann α und β entsprechend, oder $F(\alpha, \beta) = 0$) hingegen a und b das x und y im Endpunkte. Das Integral einer Differenzialfunktion von x und y ist allemal eine Funktion von x und y, worin die Konstante schon bestimmt



ist, wenn nach Integrirung dieser Differenzialfunktion jedem Gliede (im gefundenen Integral) mit verkehrten Zeichen ein gleiches Glied beigesetzt wird, worin aber statt x und y (welches die x und y im Endpunkte bedeutet) α und β substituirt werden; hätte man z. B. durch Integrirung gefunden: $gxy + mx - cy^2$, so wäre mit Bestimmung der Konstante $gxy - g\alpha\beta + mx - m\alpha - cy^2 + c\beta^2$, also das dem $x = a$ und $y = b$ entsprechende Stück $= g.a.b - g\alpha\beta + m.a - m\alpha - cb^2 + c\beta^2$.

Kömmt es darauf an, den algebraischen Ausdruck von f(x) zu bestimmen, so ist man dieses im Stande, wenn man aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck von df(x) ansetzen, und diesen Differenzialausdruck integriren kann; denn dann ist dieses gefundene Integral der gesuchte algebraische Ausdruck, wenn nebstbei die darin befindliche Konstante aus den Bedingnissen der Aufgabe bestimmt werden. Dieses ist darum wahr: wenn einerlei Differenzial, werde es auch auf verschiedenerlei Wegen gesucht, zwei Funktionen zukömmt, so sind diese zwei Funktionen eine und dieselbe von einander in nichts verschiedene Funktion. Ist z. B. f(x) dx das Differenzial einer Fläche, und ist zugleich $f(x)\,dx = dF(x)$, so ist diese Fläche $= F(x)$. Ist der algebraische Ausdruck einer F(x, y, z) zu finden, so setze man aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck von dF(x, y, z) an, so ist wie vorhin dessen Integrale mit bestimmten Konstanten der gesuchte algebraische Ausdruck. Es kann aber auch der hier gesuchte algebraische Ausdruck so gefunden werden: setze aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck jenes Inkrementums an, worum F(x, y, z) dadurch wächst, daß einmal nur x um dx, in dem dadurch erhaltenen Partialdifferenzial blos y um dy, und in dem hiedurch erhaltenen Partialdifferenzial blos z um dz wächst; ist der algebraische Ausdruck blos dieses letzten Inkrementen-Inkrementums gefunden, so integrire selbigen blos im Bezug auf z (d. h. betrachte blos z als veränderlich beim Integriren) in welchem gefundenen Integral also die Konstante eine Funktion von x, und y seyn kann; f(x, y), weil x und y bei diesem Integriren beständige Größen waren, und bestimme diese Funktion von x und y aus den Bedingnissen der Aufgabe, welches leicht geschieht, wenn man erwäget, was eigentlich ein = Null gesetzter Differenzialausdruck heißt (man bestimmt nämlich die Konstante f(x, y) hier wieder ganz auf dieselbe Art, als ob keine Differenzialien in dem gefundenen Integrale wären, man setzt nämlich dies ganze Integrale sammt der Konstante f(x, y) für jenen Werth von $z = 0$, wo aus den Bedingnissen der Aufgabe dieser Ausdruck wirklich zu Null würde, wenn auch die Differenzialien zusammengehörige endliche Differenzen wären). Ist dieses geschehen, so integrire den erhaltenen Ausdruck blos in Bezug auf y, wo dann das erhaltene Integrale eine Funktion von x und z als Konstante enthalten kann, welche wieder auf ähnliche Art wie vorhin bestimmt wird; ist dieses geschehen, so integrire den letztbestimmten Ausdruck blos in Bezug auf x, wo dann das gefundene Integrale keine Differenzialien mehr enthält, und als Konstante eine Funktion von

y und z enthalten kann, welche wie vorhin bestimmt wird; ist dieses geschehen, so ist der letztgefundene Ausdruck der hier gesuchte algebraische Ausdruck. Daß dieses in jedem Falle seyn müsse, folgt daraus, daß, wenn man was immer für einen algebraischen Ausdruck von x, y, z algebraisch differenzirt, blos in Bezug auf x, das dadurch erhaltene Partialdifferenzial algebraisch differenzirt blos in Bezug auf y und das dadurch erhaltene Partialdifferenzial algebraisch differenzirt blos in Bezug auf z und auf vorerwähnte Art 3 mal zurück integrirt, man allgemein wieder auf den ersten Ausdruck gerathen muß; andererseits muß aber der algebraische Ausdruck des letzten Inkrementen-Inkrementums ganz derselbe seyn, werde selbiger durch algebraische Differenzirungen oder durch nicht algebraische Differenzirungen erhalten. Auch kann man sich in jedem einzelnen Beispiele leicht überzeugen, daß man auf denselben algebraischen Ausdruck geräth, ob man die dreierlei vorbesagten Integrirungen nach vorbesagter Ordnung in Bezug auf z, y, x, oder nach einer andern Ordnung vornimmt, z. B. in Bezug auf x, y, z ꝛc.

Soll die für einen bestimmten Fall zwischen x und y statt habende Gleichung gefunden werden, so setze die zwischen dx und dy aus den Bedingnissen der Aufgabe statt habende Gleichung an, integrire rechts und links ohne Rücksicht auf Konstante und addire auf einer Seite der Gleichung die Konstante, welche aus den Bedingnissen der Aufgabe zu bestimmen; dies wenn dx und dy durchaus blos als erste Potenzen vorkommen; kommen höhere ganze Potenzen vor von dx und dy, so löse (Theorie der höhern Gleichungen) eine solche auf Null reduzirte Differenzialgleichung in ihre einfachen Gleichungen auf, wo dann aus jeder solchen Gleichung nach vorerwähnter Art die zwischen x und y statt habende Gleichung gefunden wird, wo in jeder solchen Gleichung die Konstante eigends bestimmt werden muß, und wo man dann alle diese auf Null reduzirten m Gleichungen auf eine einzige auf Null reduzirte höhere Gleichung reduziren kann; weit bequemer findet man aber aus einer solchen Differenzialgleichung mit höherm ganzen Exponenten die zwischen x und y statt findende Gleichung, durch bestimmte Substitutionen, wodurch man so lange von einer gleichgeltenden Gleichung in die andere übergeht mit Anwendung der Integralrechnung und gewisser algebraischer Vortheile, bis man endlich auf die unter denselben Bedingnissen (als die zwischen dx und dy statt habende Gleichung statt findet) statt findende Gleichung gelangt.

Ist die zwischen dx und dy ans den Bedingnissen der Aufgabe statt findende Gleichung von der Art, daß darin höhere Differenzialien vorkommen, z. B. $d^m y$, ... und es ist $d^m y$ darin das höchste Differenzial, so kann man durch m maliges Zurückintegriren auf die zwischen x und y unter den Bedingnissen der Aufgabe statt findende Gleichung gelangen, wovon die Ursache leicht einzusehen *). Weit bequemer bedient man sich aber in solchen Fällen

*) Es ist aber bei diesem Integriren wohl zu merken, daß man, so lange als noch in der zu integrirenden Differenzialgleichung höhere Differenzialien vorkommen, zu dem gefundenen Integral, das Pro-

gewisser Substitutionen, wo man wieder auf ähnliche Art wie vorhin auf die zwischen x und y unter den Bedingnissen der Aufgabe statt findende Gleichung gelangt. Kommen in einer solchen Differenzialgleichung überdieß noch höhere ganze Potenzen vor von $d^m y \ldots$, z. B. $(d^m y)^n \ldots$ so löse eine solche auf Null reduzirte Differenzialgleichung (Theorie der höhern Gleichungen) in ihre einfachen höhern Differenzialgleichungen auf, und suche aus jeglicher derselben die zwischen x und y statt findende Gleichung nach vorerwähnter Methode, wo dann alle diese zwischen x und y statt findenden Gleichungen durch eine einzige auf Null reduzirte höhere Gleichung ausgedrückt werden können, aber auch in diesen Fällen gibt es gewisse Substitutionen, mittelst welchen man auf ähnliche Arten als vorhin auf die zwischen x und y statt findende Gleichung gelangt. Bei diesen höhern Differenzialgleichungen gibt Euler einen oft sehr anwendbaren Rechnungsvortheil an, nämlich eine gewisse Substitution, mittelst welcher man aus der zwischen den höhern Differenzialien statt findenden Gleichung, wobei man dx als beständiges, dy als veränderliches Inkrementum angenommen, unmittelbar jene höhere Differenzialgleichung findet, welche man gefunden hätte, wenn man vom Anfange der Auflösung der Aufgabe an dx und dy als veränderlich betrachtet hätte, woraus es dann leicht ist, jene höhere Differenzialgleichung zu finden, welche man bekommen hätte, wenn man von besagtem Anfange an dx als veränderlich und dy als beständig angenommen hätte, indem man blos jene Glieder auszulassen hat, worin höhere Differenzialien von y vorkommen. Dieser Rechnungsvortheil ist darum sehr wichtig, weil man oft nur dadurch leicht auf eine höhere Differenzialgleichung gelangt, daß man dx als beständig, und dy als veränderlich betrachtet, daß es aber zugleich oft sehr schwer fällt, aus einer solchen höhern Differenzialgleichung die zwischen x und y statt habende Gleichung zu finden, und dieses oft weit leichter aus jener höhern Differenzialgleichung gefunden würde, welche höhere Differenzialgleichung man dann gefunden hätte, wenn man vom besagten Anfange an dy als beständig, und dx als veränderlich betrachtet hätte; kann man aber durch die auf die eine oder die andere Art erhaltene höhere Differenzialgleichung auf die zwischen x und y statt findende Gleichung kommen, so gibt besagte Methode ein sehr bequemes Mittel ab, um zu sehen, ob irgend eine solche Aufgabe einer bestimmten Auflösung fähig ist, welches in jenen Fällen nicht wäre, wo man aus den zweierlei höhern Differenzialgleichungen nicht auf eine und dieselbe Gleichung zwischen x und y durch übrigens richtige Operation käme, da in einer Aufgabe verschiedenerlei richtige Methoden nur

---

dukt aus einer beständigen Größe und dem als beständig angenommenen Differenzial mit seiner gehörigen Potenz hinzuaddiren müsse; denn es ist bekannt, daß nach der ersten Differenzirung die beständigen, nach der zweiten aber auch schon jene Größen hinwegfallen, die selbst beständig sind und das als beständig angenommene Differenzial zum Koeffizienten haben; dasselbe geschieht beim dritten Differenziren u. s. w.

auf einerlei Resultate führen können, wenn die Aufgabe von der Art ist, daß sie einer bestimmten Auflösung fähig ist.

Enthält eine Funktion von x und y kein angezeigtes Integral, und es wird gefragt, bei welchen Werthen von x und y eine solche Funktion zu einem max. oder min. werde, so kann die Antwort allemal nur dahin ausfallen: bei diesen oder jenen bestimmten Werthen von x, y; dann wird also nie der Lauf einer Kurven, sondern allemal werden nur einzelne Punkte einer bestehenden Kurven bestimmt. Fragen solcher Art gehören in das Gebiet der Differenzialrechnung und sind nach der bekannten Taylor'schen Formel leicht aufzulösen *). Enthält hingegen eine Funktion von x und y ein angezeigtes Integral,

---

*) Bei dieser Taylor'schen Formel ist zu merken: bestehe $F(x, y)$, worin x und y mit einander in gar keiner Relation stehen, so daß bei unverändertem y, wie wenn $y = a$ wäre, das x um $\pm \Delta x$, und umgekehrt bei unverändertem x, wie wenn $x = b$ wäre, das y um $\pm \Delta y$ wachsen kann, dann ist $F(x \pm \Delta x, y) = F(xy) \pm \frac{dF(xy)\Delta x}{dx} + \frac{d^2F(xy)\Delta x^2}{2dx^2} \pm \frac{d^3F(xy)\Delta x^3}{2.3.dx^3} + \ldots\ldots$, alles blos in Bezug auf x differenzirt). Es ist also $F(x, y)$ blos in Bezug auf die Veränderlichkeit von x ein max. wenn $x = f(y)$, oder $= f^{+}(y)$, oder $= f^{++}(y)$, vorausgesetzt, daß bei diesen Werthen von x entsteht $dF\left(\frac{xy}{dx}\right) = 0$, und zugleich $d^2\frac{F(xy)}{2dx^2} = -$; ein Minimum hingegen wird, u. s. w. Eben so ist $F(x, y \pm \Delta y) = F(x, y) \pm \frac{dF(x, y)\Delta y}{dy} + \frac{d^2F(x, y)\Delta y^2}{2dy} \pm \frac{d^3F(x, y)\Delta y^3}{2.3.dy^3} + \ldots\ldots\ldots$, alles blos in Bezug auf y differenzirt. Also ist $F(x, y)$ blos in Bezug auf die Veränderlichkeit von y ein max., wenn $y = F(x)$ oder $= F^{+}(x)$, vorausgesetzt, daß bei diesen Werthen von y entsteht $\frac{dF(xy)}{dy} = 0$ und zugleich $\frac{d^2F(xy)}{2dy^2} = -$; ein min. hingegen wird ...... Es wird also $F(xy)$ die Veränderlichkeit von x und y zu gleicher Zeit berücksichtigt, ein max. bei folgenden für x und y zugleich statt findenden Werthen: $x = f(F(x))$ und $y = F(f(y))$, dann $x = f^{+}(F^{+}(x))$ und $y = F^{+}(f^{+}(y))$, dann $x = f(F^{+}(x))$, und $y = F(f^{+}(y))$, dann $x = f^{+}(F^{++}(x))$, und $y = F(f^{+}(y))$, dann .... woraus sich sowohl für x als y deren beständige Werthe finden lassen, welche allemal zugleich statt finden müssen. Ist hingegen $f(xy)$ von der Natur, daß zwischen x und y eine Relation statt findet, so daß, wenn x um $\pm \Delta x$ wächst, auch y um $\pm \Delta y$ oder um $\mp \Delta y$ wachsen muß, so ist $f(x \pm \Delta x, y)$, schon eo ipso $= f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$, und eben so $f(x, y \pm \Delta y) = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$, und da ist denn $f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$ (welches auch heißen könnte $f(x \pm \Delta x, y \mp \Delta y)$) $= f(xy) \pm \frac{df(xy)\Delta x}{dx} + \frac{d^2f(xy)\Delta x^2}{2dx^2} \pm \frac{d^3f(xy)\Delta x^3}{2.3dx^3} + \ldots\ldots$, oder es ist eben so $f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$ (welches auch heißen könnte $f(x \mp \Delta x, y \pm \Delta y)$) $= f(xy) \pm \frac{df(xy)\Delta y}{dy} + \frac{d^2f(xy)\Delta y^2}{2dy^2} \pm \frac{d^3f(xy)\Delta y^3}{2.3dy^3} + \ldots$ in welchen beiden Taylor'schen Formeln sowohl in Bezug auf x als in Bezug auf y, differenzirt ist; es ist also in diesem Falle $f(xy)$ ein max. wenn $\frac{df(xy)}{dx} = 0$, und zugleich $\frac{d^2f(xy)}{2dx^2} = -$, oder wenn

worin die Gleichung zwischen x und y noch willkührlich, so ist sie ein summarischer, auch für ein angenommenes x noch unbestimmter Ausdruck, welcher eigentlich von dem ganzen Laufe einer Kurven abhängt, oder von jener Gleichung zwischen Abscisse x und Ordinate y, wodurch der Lauf einer Kurven bestimmt wird. Frägt man also in einem solchen Falle, wann $\int \ldots\ldots$ zu einem max. oder min. werde, so kann die Antwort nie dahin ausfallen: bei diesen oder jenen Werthen von x, sondern allemal nur dahin: bei dieser oder jener Gleichung zwischen x und y, wornach die Kurve konstruirt (worauf sich die jedesmalige Aufgabe bezieht) $\int \ldots\ldots$ zu einem max. oder min. wird. Fragen dieser Art gehören in das Gebiet der Variationsrechnung, welche eigentlich nichts anders ist, als eine Differenzirung von $\int \ldots\ldots$ in einer andern Beziehung als die hinter dem Integralzeichen stehende Funktion differenzirt ist, weßhalb man sich beim Variren des Zeichens δ bedient; man kann also sagen: differenziren heißt mit dem Zeichen d, hingegen variren mit dem Zeichen δ differenziren. Differenzirt werden Funktionen ohne Integralzeichen, hingegen varirt nur angezeigte Integral-Funktionen, worin die Gleichung zwischen x und y noch ganz willkührlich ist. Die andere Beziehung beim Variren von $\int \ldots\ldots$ als beim Differenziren von der hinter dem Integralzeichen stehenden Funktion besteht darin, daß beim Variren eine Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y angenommen wird, hingegen beim Differenziren blos eine Veränderlichkeit der Wurzeln x, y der Funktion von x und y.

Man begreift leicht, daß $\delta d(\;) = d\delta(\;)$ und $\delta\int(\ldots\ldots) = \int\delta(\ldots\ldots)$. Heiße hier Δx und Δy endliche Variation von x und y, so folgt aus der Taylorschen Formel, daß wenn in $\int(\ldots\ldots)$ das x um $\pm\Delta x$ wächst, die Integralfunktion zu folgender wird: $\int(\ldots) \pm$ $\pm \delta\int(\;)\frac{\Delta x}{\delta x} + \delta^2\int(\;)\frac{\Delta x^2}{2.\delta x^2} \pm \delta^3\int(\;)\frac{\Delta x}{2.3\delta x^3} + \ldots\ldots$, oder wenn in $\int(\;)$ das y um $\pm\Delta y$ wächst, die dem $y + \Delta y$ entsprechende Integralfunktion zu folgender wird: $\int(\;) \pm$ $\pm \delta\int(\;)\frac{\Delta y}{\delta y} + \delta^2\int(\;)\frac{\Delta y^2}{2\delta y^2} \pm \delta^3\int(\;)\frac{\Delta y^2}{2.3.\delta y^3} + \ldots\ldots$, es wird also $\int(\;)$ dann ein max. oder min. seyn, wenn zwischen x und y entweder eine solche Gleichung besteht, daß $\frac{\delta\int(\;)}{\delta x} = o$, und $\frac{\delta^2\int(\;)}{2\delta x} = -$, oder auch $\frac{\delta\int(\;)}{\delta y} = o$ und $\frac{\delta^2\int(\;)}{2\delta y^2} = - \ldots.$, oder aber zwischen x und y eine solche Gleichung besteht, daß $\frac{\delta\int(\;)}{\delta x} = o$ und $\frac{\delta^2\int(\;)}{2\delta x^2} = +$ aber auch

---

$\frac{df(xy)}{dy} = o$, und zugleich $\frac{d^2f(xy)}{2dy^2} = -$, woraus z. B. x die Werthe erhalte: $= f(y)$, oder $= f^{+}(y)$, oder $= f^{++}(y)$, da aber eine Gleichung zwischen x und y besteht, woraus $y = f-(x)$ gefunden werden kann, so ist $f(xy)$ ein max. bei folgenden Werthen von x: $x = f(f-(x))$, oder $= f^{+}(f-(x))$, oder $= f^{++}(f-(x))$, woraus man finden kann, z. B. $x = \alpha$, oder $= \beta$, oder $= \gamma$.

$\frac{\delta \int (\;)}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta^2 \int (\;)}{2 \delta y^2} = + \ldots\ldots$, wobei Folgendes zu merken: aus den Bedingnissen der Aufgabe folgt entweder schon irgend eine Relation zwischen x und y oder nicht, so daß also entweder durch das Wachsen von x zugleich auch y wächst und umgekehrt, oder aber daß x allein um Δx oder y allein um Δy wachsen kann; bei Aufgaben der ersten Art wird alles in Bezug auf x und y, hingegen bei Aufgaben der zweiten Art alles blos in Bezug auf x oder blos in Bezug auf y varirt. Wenn man während dem Differenziren dx als beständiges, und blos dy als veränderliches Inkrementum angenommen hat, und hiedurch auf den Ausdruck $\int (\;)$ gelangt ist, und es kömmt darauf an, diese Integralfunktion, sey es blos in Bezug auf x, oder in Bezug auf x und y zu variren, so kann beim Variren keineswegs dx als beständige Größen betrachtet werden, da dx blos in Bezug des Differenzirens, nicht aber in Bezug des Varirens als beständige Größe angenommen worden, sondern wenn besagtermaßen varirt wird, alles wie immer durch x Ausgedrückte als veränderlich betrachtet werden muß; wohl kann dann beim Variren δx oder δy als beständiges Inkrementum angenommen werden, welches aber wieder nur blos in Bezug auf das Variren gelten kann u. s. w. Nimmt man hier δx als beständig an und varirt blos in Bezug auf x, so ist $\delta \int (\ldots)$ das veränderliche Inkrementum, hätte man aber in Bezug auf x und y varirt, und es fände zwischen x und y eine Relation statt, so wäre δy ein veränderliches Inkrementum, wie auch $\delta \int (\;)$.

Man wird den Geist der Variationsrechnung sicher fassen, wenn gleich dieser Gegenstand sehr abstrakt und ein Resultat schon vieler analytischen Vorkenntnisse und vieler in dem Gebiete des Infinitesimalkalkuls selbst verrichteter Rechnungen ist, wenn man nur im Stande ist, den eigentlichen Sinn einer Variation überhaupt recht einzusehen.

Beispiel der ersten Art. Welche Gleichung muß zwischen x und y statt finden, wornach die Kurve konstruirt, $\int y\,dx$ zum max. wird, wenn nebstbei noch die Bedingniß eintreten soll, daß $\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = p$? Hierzu sage $\pm \frac{\delta \int y\,dx}{\delta y} = \frac{\int \delta (y\,dx)}{\delta y} = \frac{\int dx\,\delta y + \int y\,\delta dx}{\delta y} = \frac{\int dx\,\delta y + \int y\,d\,\delta x}{\delta y}$ (um die Bedingniß $\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = p$ mit in Rechnung zu bringen, so sage: $\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$, $\int \delta (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} =$ $= \int \frac{(2\,dx\,\delta dx + 2\,dy\,\delta dy)(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \int \frac{dx\,\delta dx + dy\,d\,\delta y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} =$ $= \int \frac{dx\,d\,\delta x + dy\,d\,\delta y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$, woraus $d\,\delta x = -\frac{dy\,d\,\delta y}{dx}$), $\frac{\int dx\,\delta y + \int y\,d\,\delta x}{\delta y} =$

$= \frac{\int dx\,\delta y - \int \frac{y\,dy\,d\delta y}{dx}}{\delta y} = \frac{\int dx\,\delta y + \int \delta y . d\left(\frac{y\,dy}{\delta x}\right)}{\delta y} - \frac{\frac{y\,dy}{dx}\,\delta y}{\delta y} =$ (und mit Bestimmung der Konstante, wenn x und y am Endpunkte $=$ a und b, am Anfangspunkte $= \alpha$ und β) $= \frac{\int dx\,\delta y + \int \delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y} - \frac{b\,db}{da} + \frac{\beta\,d\beta}{d\alpha}$. Soll nun dieß $= 0$ seyn, so muß hiezu an und für sich $\frac{\int dx\,\delta y + \int \delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y} = 0$, woraus $\frac{dx\,\delta y + \delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y} = 0$, $\frac{y\,dy}{dx} + x = C$, $y\,dy = C\,dx - x\,dx$, $\frac{y^2}{2} = Cx - \frac{x^2}{2} + D$......

Beispiel der zweiten Art. Bei welcher Gleichung zwischen x und y wird in der darnach konstruirten Kurven $\int \sqrt{dy^2 + dx^2}$ ein min.? Sage $\frac{\delta \int \sqrt{dy^2+dx^2}}{\delta y} =$

$= \frac{\int \delta \sqrt{dy^2+dx^2}}{\delta y} = \frac{\int \frac{(dy^2+dx^2)^{-\frac{1}{2}}}{2}\,2\,dy\,\delta dy}{\delta y} = \frac{\int \frac{dy\,d\delta y}{(dy^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}}}{\delta y} = 0$, u. s. w., woraus wieder wie vorhin folgt $\frac{\int \delta y\,d\left(\frac{dy}{(dy^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\delta y} = 0$......

$$=\frac{\int dx\,\delta y-\int\frac{y\,dy\,d\delta y}{dx}}{\delta y}=\frac{\int dx\,\delta y+\int\delta y.\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y}-\frac{\frac{y\,dy}{dx}\,\delta y}{\delta y}=$$ (und mit Bestimmung der Konstante, wenn x und y am Endpunkte = a und b, am Anfangspunkte = α und β) $$=\frac{\int dx\,\delta y+\int\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y}-\frac{b\,db}{da}+\frac{\beta\,d\beta}{d\alpha}.$$ Soll nun dieß = o seyn, so muß dieß an und für sich $\frac{\int dx\,\delta y+\int\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y}=o$, woraus $\frac{dx\,\delta y+\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y}=o$,

$\frac{y\,dy}{dx}+x=C$, $y\,dy=C\,dx-x\,dx$, $\frac{y^2}{2}=Cx-\frac{x^2}{2}+D$......

Beispiel der zweiten Art. Bei welcher Gleichung zwischen x und y wird in der darnach konstruirten Kurven $\int\sqrt{dy^2+dx^2}$ ein min.? Sage $\frac{\delta\int\sqrt{dy^2+dx^2}}{\delta y}=$

$$\frac{\int\delta\sqrt{dy^2+dx^2}}{\delta y}=\frac{\int\frac{1}{2}(dy^2+dx^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2dy\,d\delta y}{\delta y}=\frac{\int\frac{dy\,d\delta y}{(dy^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}}}{\delta y}=o,$$ u.s.w., woraus wieder wie vorhin folgt $\frac{\int\delta y\,d\left(\frac{dy}{(dy^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\delta y}=o$......

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Buquoy, Georg <<von>>,

Zusammenstellung einiger vorzüglich scharfsinniger schlau erdachter und subtil durchgeführter Methoden aus der höhern Analyse nebst einem Anhange den Geist der Differenzial-, Integral-, Variations-Rechnung enthaltend

Leipzig 1829

4 Math.p. 57 u
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053338-3